Г. Н. Положий

Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента

Издательство Киевского университета

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ФУНКЦИИ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА

ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1962

530.1
Н 62

В книге приводятся исследования автора по численному решению двумерных и трехмерных краевых задач математической физики.

Книга может оказаться полезной для научных работников и инженеров, интересующихся численным решением задач математической физики и техники, особенно в тех случаях, когда к точности приближенных решений предъявляются высокие требования.

ПРЕДИСЛОВИЕ

При приближенном решении краевых задач математической физики, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных, путем сведения их к соответствующим конечноразностным краевым задачам значительные трудности возникают при решении соответствующих систем линейных алгебраических уравнений в том случае, когда число этих уравнений не является достаточно малым. Характеристика этих трудностей на сегодняшний день приводится в работах [1, 2].

В этой книге приводятся исследования автора по численному решению двумерных и трехмерных краевых задач математической физики, преимущественно связанных с линейными дифференциальными уравнениями второго и четвертого порядков.

Вначале, выдвигая общую концепцию развития «анализа конечно малых», вводятся специальные функции дискретного аргумента, устанавливаются для них специальные формулы сложения аргумента и строится своеобразный аппарат так называемых P-трансформаций.

Затем предлагается метод, позволяющий решения краевых задач для уравнений в частных конечных разностях, соответствующих указанным двумерным и трехмерным краевым задачам математической физики, находить в явном виде или в виде довольно простых формул, содержащих небольшое количество параметров, численные значения которых определяются из соответствующего небольшого числа линейных алгебраических уравнений. В результате для многих достаточно широких классов задач математической физики получается сравнительно очень малый объем вычислительной работы, необходимый для получения решений, достигается некоторая возможность избежать большую вычислительную погрешность и устраняются определенные неудобства, связанные с табличной формой записи решений. Практические возможности получения вполне удовлетворительных численных решений задач математической физики, особенно при достаточно мелких шагах сетки, сильно расширяются.

Книга может оказаться полезной при численном решении всех возможных краевых задач математической физики и ее приложений в инженерной практике, особенно в тех случаях, когда к точности приближенных решений предъявляются высокие требования.

Результаты исследований были прочитаны автором в 1960/61 учебном году в качестве спецкурса студентам Киевского ордена Ленина государственного университета им. Т. Г. Шевченко, специализирующимся при кафедре вычислительной математики.

Автор будет признателен за замечания и пожелания в адрес настоящей книги со стороны читателей.

ВВЕДЕНИЕ

Среди всевозможных приближенных методов решения краевых задач математической физики одно из самых видных мест занимает метод сведения этих краевых задач к соответствующим конечноразностным краевым задачам, или, что все равно, к системам алгебраических уравнений. Этот метод известен в литературе под названием метода конечных разностей, или метода сеток. При помощи метода конечных разностей очень удачно реализуется основная идея всех приближенных методов математики — аппроксимация различных функциональных пространств более узкими счетномерными и конечномерными пространствами.

При использовании метода конечных разностей для решения краевых задач математической физики возникают следующие основные вопросы:

а) проблема существования и единственности решения соответствующей конечноразностной краевой задачи;

б) проблема сходимости решения конечноразностной задачи к точному решению соответствующей краевой задачи математической физики;

в) проблема быстроты сходимости, или, что все равно, оценки погрешности метода, т. е. проблема оценки разности точного решения краевой задачи математической физики и точного решения соответствующей конечноразностной задачи;

г) проблема нахождения решения конечноразностной краевой задачи, или, что все равно, соответствующей системы алгебраических уравнений.

Из обширной литературы, посвященной методу конечных разностей и его применениям к решению конкретных задач математической физики, а также к доказательству теорем существования решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, ограничимся указанием на работы [3]—[12] и ссылкой на обстоятельную статью [13], в которой приведена довольно полная библиография работ по методу конечных разностей, главным образом советских ученых, за последние сорок лет. Обзор работ и результатов применения метода конечных разностей для доказательства теорем существования решений краевых задач для дифференциальных уравнений приведен в работе [14].

Двумерные и трехмерные краевые задачи математической физики связаны с определенными дифференциальными уравнениями в частных производных. Среди этих дифференциальных уравнений прежде всего следует назвать уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, уравнение теплопроводности, волновое уравнение, бигармоническое уравнение, уравнение колебаний стержня, уравнение колебаний пластинки и вообще линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами, а также с коэффициентами, зависящими от независимых переменных тем или иным специальным образом (см. [15]—[25]). Некоторые задачи из различных разделов математической физики оказываются связанными с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка (см. [26]—[32]), а также с некоторыми уравнениями в частных производных шестого и восьмого порядков с постоянными коэффициентами (см. [33]).

Относительно часто встречающихся дифференциальных уравнений в частных производных математической физики можно считать, что из всех указанных выше основных вопросов, связанных с методом конечных разностей, вопросы а), б) и в) достаточно хорошо изучены. Результаты исследований по этим вопросам, достигнутые различными авторами, часто не заставляют желать чего-либо лучшего. Однако этого ни в коем случае нельзя сказать по отношению к вопросу г) — о численном решении конечноразностных краевых задач или соответствующих систем алгебраических уравнений. Дело в том, что, желая сделать погрешность метода конечных разностей по возможности малой, мы должны брать шаги сетки достаточно мелкими. За счет этого соответствующая система алгебраических уравнений становится довольно громоздкой, состоит из большого количества уравнений с соответствующим большим числом неизвестных. Решение таких систем с большим числом неизвестных оказывается связанным со значительными трудностями. Особенно это относится к случаю конечноразностных краевых задач, соответствующих эллиптическим дифференциальным уравнениям, когда решение соответствующей системы алгебраических уравнений не получается по явной схеме, т. е. не сводится к непосредственному счету по шагам (см., например, [34]—[43]). Общеизвестными методами решения таких систем алгебраических уравнений являются метод исключений, метод последовательных приближений и метод релаксаций. Однако все эти методы можно считать вполне удовлетворительными только в том случае, когда количество алгебраических уравнений, соответствующих данной конечноразностной задаче, довольно малое (см., например, [2], [44]—[46]). В противном случае возникают значительные трудности, характеристика которых приводится, например, в работах [1], [2].

Из создающихся таким образом затруднительных положений выходы, на наш взгляд, должны идти одновременно по двум, в некотором смысле противоположным, направлениям:

1) по линии повышения быстроты действия вычислительных машин с целью увеличения практически выполнимого количества арифметических операций;

2) по линии создания новых, более современных методов вычислительной математики применительно к конкретным достаточно широким классам математических задач, которые наряду с малой погрешностью метода не приводили бы к опасности накопления большой вычислительной погрешности, могущей возникнуть при выполнении большого количества арифметических операций.

Сколь бы далеко мы не продвинулись в первом направлении, без развития второго направления нельзя надеяться на получение удовлетворительных решений многих классов математических задач [1].

Поэтому применительно ко всевозможным линейным двумерным и трехмерным краевым задачам математической физики исключительно важной следует считать проблему изыскания новых, более совершенных методов решения соответствующих конечноразностных краевых задач, или, что все равно, соответствующих систем линейных алгебраических уравнений, когда количество уравнений, входящих в эти системы, довольно велико.

Определенный интерес с этой точки зрения представляют работы [47]—[51]. Очень интересным является также метод прогонки, или матричной факторизации, разработанный в последние годы в основном в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР и нашедший свое отражение в книгах [52], [53]. Этот метод с успехом применяется для решения одномерных и двумерных конечноразностных краевых задач, связанных с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. При этом характерным является то, что весь процесс решения задач сводится к некоторому устойчивому счету по шагам. Причем в двумерном случае, в отличие от одномерного, на каждом шагу дело связано с обращением вполне определенных матриц.

Как прямое подтверждение не только важности, но и сложности указанной выше проблемы можно рассматривать появление в литературе специальных таблиц, подобных таблицам [54], приспособленных к решению двумерных краевых задач для уравнения Лапласа [2]. Можно считать, что об этом же говорит появление в вычислительной технике сеточных электроинтеграторов, позволяющих

---

[1] Об этом можно было бы не говорить, если бы не встречалось неправильное мнение о том, что повышение быстроты действия вычислительных машин решает все вопросы сразу.

[2] В этих таблицах приведено численное решение краевых задач для уравнения Лапласа в случае вполне определенных типов двумерных областей, для которых из уравнений математической физики известно явное выражение функции Грина.

решать конечноразностные краевые задачи, связанные с линейными эллиптическими дифференциальными уравнениями второго порядка с числом неизвестных, доходящим в наиболее совершенных конструкциях до 1000—1200 (см. [55]). То же самое можно сказать о гидроинтеграторах, предназначенных для приближенного решения задач, связанных с дифференциальным уравнением теплопроводности. Все это становится особенно убедительным, если учесть, что изготовление и обслуживание подобного рода устройств требует большой затраты сил и средств.

В настояшей книге мы приводим исследования по указанной выше проблеме решения конечноразностных краевых задач или систем линейных алгебраических уравнений, соответствующих двумерным и трехмерным краевым задачам математической физики, связанным преимущественно с линейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго и четвертого порядков.

Для решения указанных конечноразностных краевых задач мы предлагаем новый метод, который в дальнейшем будем называть методом суммарных представлений и P-трансформаций [56]—[58].

Сущность этого метода заключается в нахождении решений конечноразностных краевых задач, соответствующих краевым задачам математической физики для плоских и пространственных областей общего вида, в явной форме или в виде довольно простых формул, содержащих небольшое количество параметров, определяемых из соответствующего небольшого числа линейных алгебраических уравнений.

Особенно эффективные результаты получаются в применении ко всевозможным краевым задачам для основных уравнений математической физики: уравнения Лапласа, уравнения Пуассона, уравнения теплопроводности, волнового уравнения, бигармонического уравнения, уравнения колебаний стержня и некоторых других дифференциальных уравнений в частных производных, часто встречающихся в математической физике и технике.

Характерным для нашего метода является то, что здесь подавляющая часть неизвестных, входящих в конечноразностные краевые задачи, непосредственно в счете в процессе получения решений не участвует. Это приводит к сравнительно малому объему вычислительной работы, необходимой для получения решений, а вместе с тем и к простой возможности устранения излишне большой вычислительной погрешности. Это же оказывается важным потому, что количество неизвестных, входящих в конечноразностные краевые задачи, приходится увеличивать, как правило, не для того, чтобы знать приближенное решение во многих точках области, а для того, чтобы уменьшить погрешность метода. Наконец, отметим, что запись нами решений в виде формул суммарных представлений, на наш взгляд, имеет определенные преимущества по сравнению с табличной формой записи решений, во всяком случае не требует составления больших числовых таблиц, из которых в конечном счете нужными оказываются только несколько чисел, и содержит некоторые простые возможности для качественных и аналитических исследований суммарных характеристик краевых задач [1].

Отметим, что, преследуя цель распространения нашего метода на решение краевых задач, связанных с линейными дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами общего вида, нам пришлось ввести так называемые специальные функции дискретного аргумента, порождаемые конечноразностными уравнениями второго порядка. Эти функции дискретного аргумента определены нами в явной форме через коэффициенты соответствующих конечноразностных уравнений второго порядка в виде некоторых определителей. Замечательным свойством введенных таким образом специальных функций дискретного аргумента оказалось то, что для них всех без исключения имеют место формулы сложения аргумента, могущие значительно облегчать всякого рода вычисления и преобразования, связанные с этими функциями. Развивая в дополнение к этому специальный аппарат так называемых P-трансформаций, соответствующих специальным матрицам — «матрицам типа Π», мы распространяем наш метод на решение конечноразностных краевых задач, соответствующих двумерным и трехмерным краевым задачам математической физики, связанным с линейными дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами.

Книга состоит из двух глав.

В главе первой, следуя общей концепции развития «анализа конечно малых», строится общая теория задачи о собственных числах и собственных функциях в классе функций дискретного аргумента. Проводится полная аналогия с известной задачей Штурма–Лиувилля в теории дифференциальных уравнений. Изучаются так называемые матрицы типа Π, в некотором смысле близкие к эрмитовым матрицам, соответствующие им фундаментальные матрицы ортогональны с некоторым весом ϱ. В результате получается целый ряд матриц, имеющих важное значение, в том числе одна из матриц, встречавшаяся в литературе ранее, для которых собственные числа и фундаментальные матрицы находятся в явном виде. Указывается общий принцип построения специальных функций дискретного аргумента, через которые выражается общее решение линейного конечноразностного уравнения второго порядка в общем случае. Устанавливаются для этих специальных функций общие формулы приведения или формулы сложения аргумента. Показывается, что для фундаментальной матрицы, соответствующей всякой матрице типа П, в качестве обратной будет она сама, взятая со знаком транспонирования и умноженная на вес ϱ — вполне определенную диагональную матрицу.

---

[1] Под суммарными характеристиками краевых задач мы понимаем такие величины, связанные с решением краевых задач, которые представляют непосредственный интерес для приложений, из-за необходимости численного определения которых обычно и приходится решать краевые задачи.

В главе второй приводится вывод формул суммарных представлений для различных двумерных и трехмерных краевых задач математической физики, связанных с уравнением Лапласа, уравнением Пуассона, бигармоническим уравнением, обобщенным уравнением теплопроводности, обобщенным волновым уравнением и уравнением поперечных колебаний стержня. Достигается это при помощи P-трансформаций специальных видов. Затем дается применение полученных формул суммарных представлений для решения краевых задач, вначале для областей специального вида, а потом для областей совершенно общей природы. В качестве иллюстрации приводится один простой (с точки зрения нашего метода) числовой пример приближенного решения краевой задачи для уравнения Лапласа для области, близкой к прямоугольнику, содержащей в составе своей границы некоторую кривую, при очень большом количестве узлов сетки (равном нескольким миллионам).

В конце главы при помощи P-трансформаций общего вида выводятся формулы суммарных представлений и предлагаемый нами метод для решения краевых задач распространяется на решение уравнений в частных конечных разностях, соответствующих краевым задачам математической физики, связанным с дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами.

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА. МАТРИЦЫ ТИПА Π

§ 1. ОБЫКНОВЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

Приведем некоторые общеизвестные сведения об обыкновенных уравнениях в конечных разностях (см. [59]—[61]) и общие решения некоторых конкретных уравнений в конечных разностях, необходимые для дальнейшего.

Под дискретной независимой переменной или дискретным аргументом x будем понимать переменную x, принимающую значения

$$x = x_0 + ih, \quad i = 0, \ \pm 1, \quad \pm 2, \ \ldots, \tag{1}$$

где h — положительная постоянная — шаг дискретного аргумента, x_0 — фиксированное число.

Будем говорить, что $u(x)$ есть функция дискретного аргумента в промежутке $[a, b]$, если значения $u(x)$ определены во всех точках дискретного аргумента, расположенных в этом промежутке.

Функции дискретного аргумента $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ будем называть линейно зависимыми в промежутке $[a, b]$, если в этом промежутке имеет место тождество

$$C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + \ldots + C_nu_n(x) \equiv 0, \tag{2}$$

где C_1, C_2, ..., C_n — постоянные, одновременно не равные нулю. В противном случае функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ будем называть линейно независимыми в данном промежутке.

Отметим одну хорошо известную теорему (см. [60]).

Теорема 1. Если функции дискретного аргумента $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ при $x \geqslant x_0$ линейно зависимы, то определитель

$$D[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)] =$$
$$= \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots\ldots & u_n(x) \\ u_1(x+h) & u_2(x+h) & \ldots & u_n(x+h) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1(x+(n-1)h) & u_2(x+(n-1)h) & \ldots & u_n(x+(n-1)h) \end{vmatrix} \tag{3}$$

тождественно равен нулю при $x \geqslant x_0$. Обратно: если при $x \geqslant x_0$ определитель (3) тождественно равен нулю, а $D\,[u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x)]$ не принимает нулевых значений, то функция $u_1(x)$ при $x \geqslant x_0$ будет линейной комбинацией с постоянными коэффициентами функций $u_2(x)$, $u_3(x)$, ..., $u_n(x)$.

Линейное обыкновенное уравнение в конечных разностях n-го порядка в общем случае записывается в виде

$$u(x+nh) + p_1(x)\,u(x+(n-1)h) + \ldots + p_n(x)\,u(x) = Q(x), \quad (4)$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, $Q(x)$ — заданные, а $u(x)$ — неизвестная функция дискретного аргумента x, $p_n(x) \neq 0$.

Очевидно, что в промежутке $x \geqslant x_0$ каждое решение уравнения (4) определяется заданием начальных условий

$$u(x_0),\ u(x_1),\ \ldots,\ u(x_{n-1}).$$

Если $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ — решения однородного уравнения

$$u(x+nh) + p_1(x)\,u(x+(n-1)h) + \ldots + p_n(x)\,u(x) = 0, \quad (4')$$

то функция

$$u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + \ldots + C_nu_n(x), \quad (5)$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные, будет также решением этого уравнения. При этом для определителя (3) имеет место равенство (см. [60])

$$(-1)^n D\,[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)]\,p_n(x) =$$
$$= D\,[u_1(x+h), u_2(x+h), \ldots, u_n(x+h)]. \quad (6)$$

Теорема 2. Общее решение однородного уравнения (4′) при $x \geqslant x_0$ записывается в виде

$$u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + \ldots + C_nu_n(x), \quad (7)$$

где $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ — какие-либо линейно независимые при $x \geqslant x_0$ решения этого же уравнения, C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные.

Теорема 3. Общее решение линейного неоднородного уравнения (4) в промежутке $x \geqslant x_0$ записывается в виде

$$u(x_i) = C_1u_1(x_i) + C_2u_2(x_i) + \ldots + C_nu_n(x_i) + u_0(x_i), \quad (8)$$

где $u_1(x_i)$, $u_2(x_i)$, ..., $u_n(x_i)$ — линейно независимые при $x \geqslant x_0$ решения однородного уравнения (4′), C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные, $u_0(x_i)$ — частное решение неоднородного уравнения (4), подчиненное начальным условиям

$$u_0(x_0) = u_0(x_1) = \ldots = u_0(x_{n-1}) = 0 \quad (8')$$

и определяющееся равенством

$$u_0(x_l) = \sum_{j=0}^{j=l-1} \frac{\begin{vmatrix} u_1(x_{j+1}) & u_2(x_{j+1}) & \dots & u_n(x_{j+1}) \\ u_1(x_{j+2}) & u_2(x_{j+2}) & \dots & u_n(x_{j+2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(x_{j+n-1}) & u_2(x_{j+n-1}) & \dots & u_n(x_{j+n-1}) \\ u_1(x_i) & u_2(x_i) & \dots & u_n(x_l) \end{vmatrix}}{D[u_1(x_{j+1}), \ u_2(x_{j+1}), \ \dots, \ u_n(x_{j+1})]} Q(x_j). \tag{8''}$$

Для доказательства теоремы воспользуемся конечными разностями

$$\Delta u(x_l) = u(x_{l+1}) - u(x_i), \quad \nabla u(x_i) = u(x_i) - u(x_{i-1}) \tag{9}$$

и оператором E, определенным равенством

$$Eu(x_i) = u(x_{i+1}). \tag{10}$$

Очевидно, что $E^{\kappa} u(x_i) = u(x_{i+\kappa})$ и операторы E, Δ и ∇ связаны соотношениями

$$E = 1 + \Delta, \qquad E^{-1} = 1 - \nabla, \tag{11}$$

вытекающими из равенств

$$Eu(x_i) = u(x_{i+1}) = u(x_l) + \Delta u(x_l) = (1 + \Delta) u(x_i),$$
$$Eu(x_i) = u(x_{l-1}) = u(x_l) - \nabla u(x_i) = (1 - \nabla) u(x_l).$$

Уравнение (4) можем записать в виде

$$\Delta^n u(x) + P_1(x) \Delta^{n-1} u(x) + \dots + P_n(x) u(x) = Q(x), \tag{12}$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$, .., $P_n(x)$ — вполне определенные функции от x, выражающиеся через коэффициенты уравнения (4), например,

$$P_n'(x) = 1 + p_1(x) + \dots + p_n(x).$$

Полагаем

$$u_0(x) = C_1(x) u_1(x) + C_2(x) u_2(x) + \dots + C_n(x) u_n(x) \tag{13}$$

и методом вариации постоянных подбираем $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ так, чтобы получить решение уравнения (12), удовлетворяющее условия (8'). Пользуясь общим тождеством

$$\Delta [u(x) v(x)] = u(x + h) \Delta v(x) + v(x) \Delta u(x), \tag{14}$$

подчиняем $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ системе уравнений

$$u_1(x+h) \Delta C_1(x) + u_2(x+h) \Delta C_2(x) + \dots + u_n(x+h) \Delta C_n(x) = 0,$$
$$\Delta u_1(x+h) \Delta C_1(x) + \Delta u_2(x+h) \Delta C_2(x) + \dots +$$
$$+ \Delta u_n(x+h) \Delta C_n(x) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \tag{15}$$

$$\Delta^{n-2}u_1(x+h)\Delta C_1(x)+\Delta^{n-2}u_2(x+h)\Delta C_2(x)+\ldots+$$
$$+\Delta^{n-2}u_n(x+h)\Delta C_n(x)=0,$$
$$\Delta^{n-1}u_1(x+h)\Delta C_1(x)+\Delta^{n-1}u_2(x+h)\Delta C_2(x)+\ldots+$$
$$+\Delta^{n-1}u_n(x+h)\Delta C_n(x)=0.$$

Определитель системы уравнений (15) совпадает с $D[u_1(x+h), u_2(x+h), \ldots, u_n(x+h)]$ и в силу линейной независимости $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ отличен от нуля. Поэтому система уравнений (15) разрешима относительно $\Delta C_1(x)$, $\Delta C_2(x)$, ..., $\Delta C_n(x)$.

Имеем

$$\Delta C_p(x)=\frac{(-1)^{n+p}D_p(x+h)\,Q(x)}{D[u_1(x+h),\ u_2(x+h),\ldots,u_n(x+h)]}, \tag{16}$$

где $D_p(x+h)$ получается из $D(x+h)=D[u_1(x+h), u_2(x+h), \ldots, u_n(x+h)]$ вычеркиванием последней строки и p-го столбца. Из (16), принимая $C_p(x_0)=0$, находим

$$C_p(x_i)=(-1)^{n+p}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{D_p(x_{j+1})}{D(x_{j+1})}Q(x_j). \tag{17}$$

Подставляя (17) в (13), получаем (8″), и, как видно из (8″), условия (8′) выполняются. Этим теорема доказана.

В силу теоремы 3 вопрос о нахождении общего решения уравнения (4) при $x\geqslant x_0$ сводится к определению n линейно независимых решений при $x\geqslant x_0$ однородного уравнения (4′).

Рассмотрим этот вопрос в применении к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами

$$u(x+nh)+a_1u(x+(n-1)h)+\ldots+a_nu(x)=0, \tag{18}$$

где a_1, a_2, ..., a_n — постоянные. Ищем решение уравнения (18) в виде

$$u(x_i)=u(x_0+ih)=\lambda^i, \tag{19}$$

где λ — некоторая постоянная. Подставляя (19) в (18), получаем так называемое характеристическое уравнение для определения λ

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{20}$$

а) Случай простых корней. Пусть корни уравнения (20) λ_k ($k=1, 2, \ldots, n$) все простые. В этом случае имеем n различных решений уравнения (18):

$$\lambda_1^i,\ \lambda_2^i,\ \ldots,\ \lambda_n^i. \tag{21}$$

[П]окажем, что решения (21) линейно независимы. Имеем

$$D(x_i) = D[\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_n^i] =$$

$$= (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^i \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

ли

$$D(x_i) = [(-1)^n a_n]^i \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Учитывая, что $a_n \neq 0$, приходим к выводу, что $D(x_i) \neq 0$ и, ледовательно, решения (21) линейно независимые. Если среди орней λ_k есть комплексные, то они всегда будут попарно сопряжен- ыми, так как коэффициенты уравнения (20) вещественны. В этом лучае каждым двум решениям λ_q^i и $\overline{\lambda}_q^i$ будет соответствовать ва вещественных решения:

$$\varrho^i \cos\Theta i = Re \frac{\lambda_q^i + \overline{\lambda}_q^i}{2}, \quad \varrho^i \sin\Theta i = Jm \frac{\lambda_q^i - \overline{\lambda}_q^i}{2}, \qquad (21')$$

, таким образом, в случае комплексных корней мы в явном виде аходим n линейно независимых решений однородного уравне- ия (18).

б) Случай кратных корней. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa$ — орни уравнения (20), соответственно кратности $s_1, s_2, \ldots, s_\kappa$, ричем $S_1 + S_2 +, \ldots, + S_\kappa = n$. Тогда в качестве n линейно не- авнсимых решений однородного уравнения (18) будут

$$\lambda_1^i,\ i\lambda_1^i,\ \ldots,\ i^{s_1-1}\lambda_1^i,\ \lambda_2^i,\ i\lambda_2^i,\ \ldots,\ i^{s_2-1}\lambda_2^i,\ \ldots,$$

$$\ldots,\ \lambda_\kappa^i,\ i\lambda_\kappa^i,\ \ldots,\ i^{s_\kappa-1}\lambda_\kappa^i. \qquad (22)$$

[Е]сли среди корней характеристического уравнения (20) есть комп- ексный корень λ_q, то найдется и корень, ему сопряженный $\overline{\lambda}_q$. В том случае группу решений уравнения (18), соответствующую λ_q $\overline{\lambda}_q$, можно заменить вещественными решениями

$$i^\nu \cos\Theta i = i^\nu Re \frac{\lambda_q^i + \overline{\lambda}_q^i}{2}, \qquad i^\nu \varrho^i \sin\Theta i = i^\nu Jm \frac{\lambda_q^i - \overline{\lambda}_q^i}{2} \qquad (22')$$

$$\nu = 0, 1, \ldots, s_q - 1.$$

[З]апишем теперь формулу (8) в применении к отдельным конкрет- ым уравнениям в конечных разностях.

1°. Дано уравнение первого порядка с постоянными коэффициен- ами

$$u(x+h) + a_1 u(x) = Q(x). \qquad (23)$$

Формула (8) принимает вид

$$u(x_i) = C\mu^i + u_0(x_i), \tag{24}$$

где $\mu = -a_1$, C — произвольная постоянная,

$$u_0(x_i) = \sum_{j=0}^{i-1} \mu^{i-1-j} Q(x_j), \quad u_0(x_0) = 0. \tag{24'}$$

2°. Пусть дано уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$u(x+2h) - 2au(x+h) + bu(x) = Q(x+h). \tag{25}$$

В этом случае корнями характеристического уравнения будут

$$\mu = a + \sqrt{\delta}, \quad \nu = a - \sqrt{\delta}, \tag{26}$$

где

$$\delta = a^2 - b. \tag{26'}$$

Введем функции $\varphi(x_i)$, $\psi(x_i)$ и $T(i)$, определяющиеся в зависимости от величины δ таблицей 1.

Таблица 1

	$\varphi(x_i)$	$\psi(x_i)$	$T(i)$	
$\delta > 0$	μ^i	ν^i	$(\mu^i - \nu^i)(\mu - \nu)^{-1}$	
$\delta = 0$	μ^i	$i\mu^i$	$i\mu^{i-1}$	
$\delta < 0$	$\cos\Theta_i$	$\varrho^i \sin\Theta_i$	$\varrho^{i-1}\sin\Theta_i(\sin\Theta)^{-1}$	$\Theta = \arccos\frac{a}{\sqrt{b}}$, $\varrho = \sqrt{b}$

При введенных обозначениях формула (8) в применении к уравнению (25) запишется в виде

$$u(x_i) = C_1\varphi(x_i) + C_2\psi(x_i) + u_0(x_i), \tag{27}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные,

$$u_0(x_i) = \sum_{j=0}^{i-1} T(i-1-j)\, Q(x_{j+1}), \quad u_0(x_0) = u(x_1) = 0, \tag{27'}$$

или

$$u_0(x_i) = \sum_{p=1}^{p=i-1} T(i-p)\, Q(x_p), \quad u_0(x_0) = u_0(x_1) = 0. \tag{27''}$$

3°. Пусть дано уравнение четвертого порядка

$$u(x+4h)-4au(x+3h)+(4a^2+2)\,u(x+2h)-$$
$$-4au(x+h)+u(x)=Q(x+2h), \qquad (28)$$

где a — постоянная ($a>1$).

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (28), имеет вид

$$P(\lambda)=\lambda^4-4a\lambda^3+(4a^2+2)\,\lambda^2-4a\lambda+1=0. \qquad (29)$$

Если μ и ν — корни уравнения (29), то корнями этого уравнения будут также $\frac{1}{\mu}$ и $\frac{1}{\nu}$. Из равенства

$$P(\lambda)=\left[\lambda^2-\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\lambda+1\right]\left[\lambda^2-\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)\lambda+1\right]$$

находим

$$\mu+\frac{1}{\mu}+\nu+\frac{1}{\nu}=4a, \qquad \left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right)=4a^2.$$

Таким образом, имеем

$$\mu+\frac{1}{\mu}=\nu+\frac{1}{\nu}=2a,$$

и корни характеристического уравнения (29) запишутся в виде

$$\mu=a+\sqrt{a^2-1}, \qquad \nu=a-\sqrt{a^2-1}. \qquad (30)$$

Оба корня вещественны, и каждый из них будет двукратным.

Линейно независимыми частными решениями уравнения (28) при $Q(x+2h)\equiv 0$ будут

$$\mu^i,\ \nu^i,\ i\mu^i,\ i\nu^i. \qquad (31)$$

Частное решение $u_0(x_i)$ уравнения (28), удовлетворяющее условиям $u_0(x_0)=u_0(x_1)=u_0(x_2)=u_0(x_3)=0$, в соответствии с (8″), запишется в виде

$$u_0(x_i)=\sum_{j=0}^{j=i-1}\frac{\begin{vmatrix}\mu^{j+1} & \nu^{j+1} & (j+1)\,\mu^{j+1} & (j+1)\,\nu^{j+1}\\ \mu^{j+2} & \nu^{j+2} & (j+2)\,\mu^{j+2} & (j+2)\,\nu^{j+2}\\ \mu^{j+3} & \nu^{j+3} & (j+3)\,\mu^{j+3} & (j+3)\,\nu^{j+3}\\ \mu^{i} & \nu^{i} & i\mu^{i} & i\nu^{i}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mu^{j+1} & \nu^{j+1} & (j+1)\,\mu^{j+1} & (j+1)\,\nu^{j+1}\\ \mu^{j+2} & \nu^{j+2} & (j+2)\,\mu^{j+2} & (j+2)\,\nu^{j+2}\\ \mu^{j+3} & \nu^{j+3} & (j+3)\,\mu^{j+3} & (j+3)\,\nu^{j+3}\\ \mu^{j+4} & \nu^{j+4} & (j+4)\,\mu^{j+4} & (j+4)\,\nu^{j+4}\end{vmatrix}}\,Q(x_{j+2}), \qquad (32)$$

или

$$u_0(x_i)=\sum_{j=0}^{j=i-4}\frac{D_{ij}}{D_j}\,Q(x_{j+2}), \qquad (32')$$

где

$$D_{ij}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & j+1 & j+1 \\ \mu & \nu & (j+2)\mu & (j+2)\nu \\ \mu^2 & \nu^2 & (j+3)\mu^2 & (j+3)\nu^2 \\ \mu^{i-\,-1} & \nu^{i-j-1} & i\mu^{i-j-1} & i\nu^{i-j-1} \end{vmatrix},$$

$$D_j=\begin{vmatrix} 1 & 1 & j+1 & j+1 \\ \mu & \nu & (j+2)\mu & (j+2)\nu \\ \mu^2 & \nu^2 & (j+3)\mu^2 & (j+3)\nu^2 \\ \mu^3 & \nu^3 & (j+4)\mu^3 & (j+4)\nu^3 \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что $\mu\nu = 1$, имеем

$$D_j=\begin{vmatrix} \nu-\mu & \mu & \nu \\ \nu^2-\mu^2 & 2\mu^2 & 2\nu^2 \\ \nu^3-\mu^3 & 3\mu^3 & 3\nu^3 \end{vmatrix} = 6(\nu-\mu)^2 - 3(\nu^2-\mu^2)^2 +$$

$$+ (\nu^3-\mu^3)\,2(\nu-\mu) = (\nu-\mu)^2\,[6 - 3(\nu+\mu)^2 + 2(\nu^2+1+\mu^2)]$$

и, следовательно,

$$D_j = -(\mu-\nu)^4 = -16(a^2-1)^2. \tag{33}$$

Далее имеем

$$D_{ij}=\begin{vmatrix} \nu-\mu & \mu & \nu \\ \nu^2-\mu^2 & 2\mu^2 & 2\nu^2 \\ \nu^{i-j-1}-\mu^{i-j-1} & (i-j-1)\,\mu^{i-j-1} & (i-j-1)\,\nu^{i-j-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (\nu^{i-j-1}-\mu^{i-j-1})\,2(\nu-\mu) -$$

$$-(i-j-1)\,\mu^{i-j-1}\,[(\nu-\mu)\,2\nu^2 - (\nu^2-\mu^2)\,\nu] +$$

$$+(i-j-1)\,\nu^{i-j-1}\,[(\nu-\mu)\,2\mu^2 - (\nu^2-\mu^2)\,\mu].$$

Таким образом, находим

$$D_{ij} = (\mu-\nu)\,[2(\mu^{i-j-1}-\nu^{i-j-1}) + (i-j-1)\,\mu^{i-j-1}(\nu^2-1) +$$

$$+(i-j-1)\,\nu^{i-j-1}(1-\mu^2)],$$

или

$$D_{ij} = (\mu-\nu)\,[(i-j-3)(\nu^{i-j-1}-\mu^{i-j-1}) -$$

$$-(i-j-1)(\nu^{i-j-3}-\mu^{i-j-3})]. \tag{34}$$

Подставляя (33) и (34) в (32′), получаем

$$u_0(x_i) = \sum_{j=0}^{j=i-4} \frac{1}{(\mu-\nu)^3}\,[(i-j-3)(\mu^{i-j-1}-\nu^{i-j-1}) -$$

$$-(i-j-1)(\mu^{i-j-3}-\nu^{i-j-3})]\,Q(x_{j+2}),$$

или

$$u_0(x_i) = \sum_{p=2}^{p=i-2} \frac{1}{(\mu-\nu)^3}\,[(i-p-1)(\mu^{i-p+1}-\nu^{i-p+1}) -$$

$$-(i-p+1)(\mu^{i-p-1}-\nu^{i-p-1})]\,Q(x_p). \tag{35}$$

Последняя сумма считается равной нулю при $i = 0, 1, 2, 3$. Таким образом, общее решение уравнения (28) при $x \geqslant x_0$, т. е. формула (8) в применении к уравнению (28), запишется в виде

$$u(x_i) = A\mu^i + B\nu^i + Ci\mu^i + Di\nu^i + u_0(x_i), \tag{36}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, $u_0(x_i)$ — функция, определенная равенством (35).

4°. Пусть дано однородное уравнение четвертого порядка

$$u(x + 4h) - 4au(x + 3h) + (4a^2 + 2 - 4b)u(x + 2h) - \\ - 4au(x + h) + u(x) = 0, \tag{37}$$

где a и b — постоянные $(-\infty < a, b < \infty)$.

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (37), запишется в виде

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 4a\lambda^3 + (4a^2 + 2 - 4b)\lambda^2 - 4a\lambda + 1 = 0. \tag{38}$$

Если μ и ν — корни уравнения (38), то корнями этого уравнения будут также $\frac{1}{\mu}$ и $\frac{1}{\nu}$. Из равенства

$$P(\lambda) = \left[\lambda^2 - \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)\lambda + 1\right]\left[\lambda^2 - \left(\nu + \frac{1}{\nu}\right)\lambda + 1\right]$$

находим

$$\mu + \frac{1}{\mu} + \nu + \frac{1}{\nu} = 4a, \quad \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) = 4a^2 - 4b.$$

Полагая

$$2p = \mu + \frac{1}{\mu}, \quad 2q = \nu + \frac{1}{\nu}, \tag{39}$$

для определения p и q имеем квадратное уравнение

$$r^2 - 2ar + a^2 - b = 0.$$

Отсюда получаем

$$p = a + \sqrt{b}, \quad q = a - \sqrt{b}.$$

Из (39) находим корни характеристического уравнения (38) в виде

$$\begin{aligned} \mu &= a + \sqrt{b} + \sqrt{(a + \sqrt{b})^2 - 1}, \\ \nu &= a + \sqrt{b} - \sqrt{(a + \sqrt{b})^2 - 1}, \\ \mu_1 &= a - \sqrt{b} + \sqrt{(a - \sqrt{b})^2 - 1}, \\ \nu_1 &= a - \sqrt{b} - \sqrt{(a - \sqrt{b})^2 - 1}. \end{aligned} \tag{40}$$

При $b < 0$ корни (40) можно записать в более удобном виде.

Учитывая, что $\mu_1 = \bar{\mu}$, $\nu_1 = \bar{\nu}$, достаточно найти μ и ν из уравнения

$$X + \frac{1}{X} = 2(a + i\sqrt{|b|}). \tag{41}$$

Полагая $X = Re^{i\Theta}$, имеем

$$\left(R + \frac{1}{R}\right)\cos\Theta = 2a, \quad \left(R - \frac{1}{R}\right)\sin\Theta = 2\sqrt{|b|}; \tag{42}$$

отсюда, полагая $\sin^2\Theta = y$, имеем

$$\frac{a^2}{1-y} - \frac{b}{y} = 1, \tag{42'}$$

или

$$(y-1)y + ya^2 - |b|(1-y) = 0.$$

Определяя y из уравнения

$$y^2 - y(1 - a^2 - |b|) - |b| = 0,$$

находим

$$y_{1,2} = \frac{1-a^2-|b|}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-a^2-|b|}{2}\right)^2 + |b|};$$

учитывая, что в силу (42) $\sin^2\Theta > 0$, имеем

$$\sin^2\Theta = \frac{1-a^2-|b|}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-a^2-|b|}{2}\right)^2 + |b|}.$$

В дальнейшем под Θ будем понимать величину

$$\Theta = \arcsin\sqrt{\frac{1-a^2-|b|}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-a^2-|b|}{2}\right)^2 + |b|}}.$$

Найдем из (42) значения R. Для $R_1 > 1$ и $R_2 < 1$ имеем

$$2R_1 \sin\Theta\cos\Theta = 2a\sin\Theta + 2\sqrt{|b|}\cos\Theta,$$
$$2R_2 \sin\Theta\cos\Theta = 2a\sin\Theta - 2\sqrt{|b|}\cos\Theta$$

и, следовательно,

$$R_1 = \frac{a}{\cos\Theta} + \frac{\sqrt{|b|}}{\sin\Theta}, \quad R_2 = \frac{a}{\cos\Theta} - \frac{\sqrt{|b|}}{\sin\Theta}.$$

При этом в силу (42') будет $R_1R_2 = 1$.

Таким образом, при $b < 0$ корни характеристического уравнения (40) можно записать в виде

$$\mu = \varrho e^{i\Theta}, \quad \nu = \varrho_1 e^{-i\Theta}, \quad \mu_1 = \varrho e^{-i\Theta}, \quad \nu_1 = \varrho_1 e^{i\Theta}, \tag{43}$$

где

$$\Theta = \arcsin\sqrt{\frac{1-a^2-|b|}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-a^2-|b|}{2}\right)^2 + |b|}}, \tag{43'}$$

$$\varrho = \frac{a}{\cos\Theta} + \frac{\sqrt{|b|}}{\sin\Theta}, \quad \varrho_1 = \frac{a}{\cos\Theta} - \frac{\sqrt{|b|}}{\sin\Theta}. \tag{43''}$$

По найденным корням характеристического уравнения (38) построим частные линейно независимые решения уравнения (37).

а) При $b=0$, $|a|>1$, как видно из (40), все корни вещественны и $\mu_1=\mu$, $\nu_1=\nu$. Линейно независимые решения уравнения (37) имеют вид

$$\mu^i,\ \nu^i,\ i\mu^i,\ i\nu^i. \tag{44}$$

б) При $b>0$, $|a-\sqrt{b}|>1$, как видно из (40), все корни вещественны и различны. Линейно независимые решения уравнения (37) запишутся в виде

$$\mu^i,\ \nu^i,\ \mu_1^i,\ \nu_1^i. \tag{45}$$

в) При $b>0$, $|a-\sqrt{b}|=1$, как видно из (40), все корни вещественны, один из них двукратный: $\mu_1=\nu_1$, остальные два — μ и ν — простые. Линейно независимые решения уравнения (37) имеют вид

$$\mu^i,\ \nu^i,\ \mu_1^i,\ i\mu_1^i. \tag{46}$$

г) При $b>0$, $|a-\sqrt{b}|<1$, как видно из (40), корни μ и ν вещественные и различные, два корня — μ_1 и ν_1 — комплексные различные:

$$\mu_1=e^{i\Theta'},\quad \nu_1=e^{-i\Theta'},\quad \Theta'=\arccos(a-\sqrt{b}). \tag{47}$$

д) При $b<0$, как видно из (43), все корни — комплексные различные.

Объединяя а), б), в), г), д), можем записать искомое общее решение однородного уравнения (37) в виде

$$u(x_i)=A\varphi(x_i)+B\psi(x_i)+C\tilde{\varphi}(x_i)+D\tilde{\psi}(x_i), \tag{48}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, $\varphi(x_i)$, $\psi(x_i)$, $\tilde{\varphi}(x_i)$, $\tilde{\psi}(x_i)$ — функции, определенные формулами таблицы 2.

Таблица 2

	$\varphi(x_i)$	$\psi(x_i)$	$\tilde{\varphi}(x_i)$	$\tilde{\psi}(x_i)$	формулы
а) $b=0$, $\lvert a\rvert>1$	μ^i	ν^i	$i\mu^i$	$i\nu^i$	(40)
б) $b>0$, $\lvert a-\sqrt{b}\rvert>1$	μ^i	ν^i	$i\mu_1^i$	$i\nu_1^i$	(40)
в) $b>0$, $\lvert a-\sqrt{b}\rvert=1$	μ^i	ν^i	$i\mu_1^i$	$i\mu_1^i$	(40)
г) $b>0$, $\lvert a-\sqrt{b}\rvert<1$	μ^i	ν^i	$\cos i\Theta'$	$\sin i\Theta'$	(40), (47)
д) $b<0$	$\varrho^i\cos i\Theta$	$\varrho^i\sin i\Theta$	$\varrho_1^i\cos i\Theta$	$\varrho_1^i\sin i\Theta$	(43), (43′), (43″)

§ 2. ОБЩАЯ ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА. МАТРИЦЫ ТИПА Π

Конечноразностные краевые задачи, эквивалентные системам линейных алгебраических уравнений с конечным числом неизвестных, встречаются почти во всей обширной литературе по приближенным методам математики. То же самое можно сказать по вопросу о собственных числах и собственных функциях указанных краевых задач (см. [34], [35], [37]—[40]). Основные результаты общего характера по этому вопросу были получены в работе Р. Куранта, Н. Фридрихса и Г. Леви [8].

В настоящем параграфе мы строим некоторую общую теорию задачи о собственных числах и собственных функциях для обыкновенных уравнений в конечных разностях. При этом достигается до некоторой степени полная аналогия с общей теорией задачи Штурма — Лиувилля для дифференциальных уравнений (см. [17], [23], [24]).

п. 1. Формулы кратного суммирования по частям. Пусть U_0, U_1, ..., U_n, V_0, V_1, .., V_n — две последовательности чисел. Тогда, как легко заметить, имеет место следующая формула «суммирования по частям»:

$$\sum_{\kappa=1}^{n} U_\kappa \nabla V_\kappa = U_n V_n - U_0 V_0 - \sum_{\kappa=1}^{n} V_{\kappa-1} \nabla U_\kappa, \tag{49}$$

или

$$\sum_{\kappa=1}^{n} U_{\kappa-1} \nabla V_\kappa = U_n V_n - U_0 V_0 - \sum_{\kappa=1}^{n} V_\kappa \nabla U_\kappa, \tag{49'}$$

где ∇— оператор, определенный вторым из равенств (9).

Формула (49) получается суммированием равенств

$$U_\kappa V_\kappa - U_{\kappa-1} V_{\kappa-1} = U_\kappa (V_\kappa - V_{\kappa-1}) + V_{\kappa-1} (U_\kappa - U_{\kappa-1})$$

от $\kappa = 1$ до $\kappa = n$. Формула (49') получается из (49), если U_κ и V_κ поменять ролями.

Пусть теперь $u(x)$, $v(x)$ и $p(x)$ — функции дискретного аргумента

$$u_\kappa = u(x_\kappa), \quad v_\kappa = v(x_\kappa), \quad p_\kappa = p(x_\kappa), \tag{50}$$

где $x_\kappa = x_0 + \kappa h$ $(\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,)$, h — шаг дискретного аргумента ($h = \text{const} > 0$).

Введем конечноразностные операторы

$$'d^2 u_\kappa = \nabla \Delta u_\kappa = u_{\kappa+1} - 2u_\kappa + u_{\kappa-1}, \tag{51}$$

$$'d\,[p_\kappa' d u_\kappa] = \nabla (p_\kappa \Delta u_\kappa) = (p_\kappa u_{\kappa+1} - p_{\kappa-1} u_\kappa) - (p_\kappa u_\kappa - p_{\kappa-1} u_{\kappa-1}). \tag{52}$$

Отметим, что если функция $u(x)$ имеет непрерывные производные до четвертого порядка, то имеет место равенство

$$\frac{'d^2 u_\kappa}{h^2} = \frac{d^2 u(x)}{dx^2}\bigg|_{x=x_\kappa} + O(h^2). \tag{51'}$$

Если функции $u(x)$ и $p(x)$ имеют непрерывные производные соответственно до третьего и до второго порядков, то имеет место равенство

$$\frac{{}'d\,[p'_\kappa du_\kappa]}{h^2} = \frac{d}{dx}\left[p\,(x)\,\frac{du\,(x)}{dx}\right]\Bigg|_{x=x_\kappa} + 0\,(h). \qquad (52')$$

Последнее равенство вытекает из разложения правой части равенства (52) по формуле Тейлора в окрестности точки $x = x_\kappa$:

$$\begin{aligned}{}'d\,[p'_\kappa du_\kappa] &= p_\kappa\,(u_{\kappa+1} - u\ \ ) + p_{\kappa-1}\,(u_{\kappa-1} - u_\kappa) = \\ &= p_\kappa \left| \frac{h}{1!}\,u'_\kappa + \frac{h^2}{2!}\,u''_\kappa + \ \ldots \right| + \\ &+ \left[p_\kappa - \frac{h}{1}\,p'_\kappa + \ldots\right]\left[-\frac{h}{1!}\,u'_\kappa + \frac{h^2}{2!}\,u''_\kappa \ldots\right] = \\ &= h^2 p_\kappa u''_\kappa + h^2 p'_\kappa u'_\kappa + 0\,(h^3).\end{aligned}$$

Покажем, что для конечноразностных операторов (51) и (52) имеют место соответственно следующие формулы «двукратного суммирования по частям»:

$$\sum_{\kappa=1}^{n} v'_\kappa d^2 u_\kappa = (u_{n+1}v_n - u_n v_{n+1}) - (u_1 v_0 - u_0 v_1) + \sum_{\kappa=1}^{n} u'_\kappa d^2 v_\kappa, \qquad (53)$$

$$\sum_{\kappa=1}^{n} v'_\kappa d\,[p'_\kappa du_\kappa] = p_n\,(u_{n+1}v_n - u_n v_{n+1}) - p_0\,(u_1 v_0 - u_0 v_1) +$$

$$+ \sum_{\kappa=1}^{n} u'_\kappa d\,[p'_\kappa dv_\kappa]. \qquad (54)$$

В силу того, что конечноразностный оператор (51) является частным случаем оператора (52) при $p_\kappa \equiv 1$, то формулу (53) можно рассматривать как частный случай формулы (54) при $p_\kappa \equiv 1$.

Докажем справедливость формулы (54).

В соответствии с (52), имеем

$$\Omega = \sum_{\kappa=1}^{n} v'_\kappa d\,[p_\kappa du_\kappa] = S - S',$$

где

$$S = \sum_{\kappa=1}^{n} v_\kappa\,[p_\kappa u_{\kappa+1} - p_{\kappa-1} u_\kappa],$$

$$S' = \sum_{\kappa=1}^{n} v_\kappa\,[p_\kappa u_\kappa - p_{\kappa-1} u_{\kappa-1}].$$

Полагая $p_\kappa u_{\kappa+1} = U_\kappa$, $p_\kappa u_\kappa = \widetilde{U}_\kappa$, можем написать

$$S = \sum_{\kappa=1}^{n} v_\kappa (U_\kappa - U_{\kappa-1}), \quad S' = \sum_{\kappa=1}^{n} v_\kappa (\widetilde{U}_\kappa - \widetilde{U}_{\kappa-1}).$$

Применяя к S и S' формулу суммирования по частям (49), получаем

$$S = v_n U_n - v_0 U_0 - \sum_{\kappa=1}^{n} U_{\kappa-1} (v_\kappa - v_{\kappa-1}),$$

$$S' = v_n \widetilde{U}_n - v_0 \widetilde{U}_0 - \sum_{\kappa=1}^{n} \widetilde{U}_{\kappa-1} (v_\kappa - v_{\kappa-1})$$

и, следовательно,

$$\Omega = (U_n - \widetilde{U}_n) v_n - (U_0 - \widetilde{U}_0) v_0 - S'',$$

где

$$S'' = \sum_{\kappa=1}^{n} (v_\kappa - v_{\kappa-1}) (p_{\kappa-1} u_\kappa - p_{\kappa-1} u_{\kappa-1}).$$

Полагая $p_{\kappa-1} (v_\kappa - v_{\kappa-1}) = V_{\kappa-1}$, имеем

$$S'' = \sum_{\kappa=1}^{n} V_{\kappa-1} (u_\kappa - u_{\kappa-1}).$$

Применяя к S'' формулу суммирования по частям (49'), получим

$$S'' = V_n u_n - V_0 u_0 - \sum_{\kappa=1}^{n} u_\kappa (V_\kappa - V_{\kappa-1}).$$

Таким образом, имеем

$$\Omega = (U_n - \widetilde{U}_n) v_n - (U_0 - \widetilde{U}_0) v_0 - (V_n u_n - V_0 u_0) + \\ + \sum_{\kappa=1}^{n} u_\kappa (V_\kappa - V_{\kappa-1}),$$

или

$$\Omega = p_n (u_{n+1} - u_n) v_n - p_0 (u_1 - u_0) v_0 - \\ - [p_n (v_{n+1} - v_n) u_n - p_0 (v_1 - v_0) u_0] + \\ + \sum_{\kappa=1}^{n} u_\kappa [p_\kappa (v_{\kappa+1} - v_{\kappa-1}) - p_{\kappa-1} (v_\kappa - v_{\kappa-1})] =$$

$$= p_n (u_{n+1} v_n - u_n v_{n+1} - p_0 (u_1 v_0 - u_0 v_1) + \sum_{\kappa=1}^{n} u'_\kappa d [p'_\kappa d v_\kappa],$$

этим формулам (54) доказана.

Формулы двукратного суммирования (53) и (54) позволяют довольно просто получать формулы «четырехкратного суммирования по частям» и вообще формулы «четнократного суммирования по частям».

Пусть, например [1],

$$'d^4u_\kappa = 'd^2['d^2u_\kappa] = u_{\kappa+2} - 4u_{\kappa+1} + 6u_\kappa - 4u_{\kappa-1} + u_{\kappa-2}'. \tag{55}$$

Тогда, в соответствии с формулой двукратного суммирования по частям (53), имеем

$$\sum_{\kappa=1}^{n} v_\kappa' d^2['d^2u_\kappa] = ('d^2u_{n+1}v_n - 'd^2u_n v_{n+1}) - \\ - ('d^2u_1v_0 - 'd^2u_0 v_1) + \sum_{\kappa=1}^{n} 'd^2u_\kappa 'd^2v_\kappa. \tag{55'}$$

Применяя еще раз формулу (53), получаем следующую формулу четырехкратного суммирования по частям:

$$\sum_{\kappa=1}^{n} v_\kappa 'd^4u_\kappa = ('d^2u_{n+1}v_n - 'd^2u_n v_{n+1}) - \\ - ('d^2u_1v_0 - 'd^2u_0v_1) + (u_{n+1}'d^2v_n - u_n'd^2v_{n+1}) - \\ - (u_1'd^2v_0 - u_0'd^2v_1) + \sum_{\kappa=1}^{n} u_\kappa 'd^4v_\kappa. \tag{56}$$

Имеем

$$('d^2u_{n+1}\cdot v_n - 'd^2u_n\cdot v_{n+1}) + (u_{n+1}'d^2v_n - u_n'd^2v_{n+1}) = \\ = v_n(u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) - v_{n+1}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \\ + u_{n+1}(v_{n+1} - 2v_n + v_{n+1}) - u_n(v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n) = \\ = v_n(u_{n+2} - 2u_{n+1}) - u_n(v_{n+2} - 2v_{n+1}) + \\ + v_{n+1}(2u_n - u_{n-1}) - u_{n+1}(2v_n - v_{n-1}) = \\ = u_{n+2}v_n - v_{n+2}u_n + u_{n+1}(v_{n-1} - 4v_n) - v_{n+1}(u_{n-1} - 4u_n).$$

Поэтому формула четырехкратного суммирования по частям (56) принимает вид

$$\sum_{\kappa=1}^{n} v_\kappa 'd^4u_\kappa = \Gamma(u_n, v_n) - \Gamma(u_0, v_0) + \sum_{\kappa=1}^{n} u_\kappa 'd^4v_\kappa, \tag{56'}$$

где

$$\Gamma(u_n, v_n) = u_{n+2}v_n - v_{n+2}u_n + \\ + u_{n+1}(v_{n-1} - 4v_n) - v_{n+1}(u_{n-1} - 4u_n), \\ \Gamma(u_0, v_0) = u_2v_0 - v_2u_0 + u_1(v_{-1} - 4v_0) - v_1(u_{-1} - 4u_0). \tag{56''}$$

[1] Заметим, что если $u(x)$ имеет непрерывные производные до шестого порядка, то имеет место равенство

$$\frac{1}{h^4}'d^4u_\kappa = \left.\frac{d^4u(x)}{dx^4}\right|_{x=x_\kappa} + 0(h^2),$$

вытекающее из разложения (55) по формуле Тейлора.

п. 2. Пространство Π и пространство Π' функций дискретного аргумента. Самосопряженные конечноразностные операторы. Под пространством Π функций дискретного аргумента будем понимать унитарное пространство, представляющее собой множество всевозможных функций дискретного аргумента, определенных на заданном отрезке $[x_1, x_n]$, в котором скалярное произведение двух функций u и v и норма функций u определены соответственно равенствами

$$(u, v) = \sum_{\kappa=1}^{n} u_\kappa v_\kappa, \tag{57}$$

$$\| u \| = \sqrt{(u, u)}. \tag{58}$$

Функции u и v будем называть ортогональными, если $(u, v) = 0$, и ортогональными с весом $\varrho(x)$, если $(\varrho u, v) = 0$, где $\varrho(x)$ — функция дискретного аргумента, определенная и положительная на отрезке $[x_1, x_n]$.

Элементы — (функции дискретного аргумента), принадлежащие пространству Π, иногда будем истолковывать как n-мерные векторы.

Будем говорить, что тот или иной конечноразностный оператор Lu определен на отрезке $[x_1, x_n]$, если он определен в каждой точке дискретного аргумента при $x_1 \leqslant x \leqslant x_n$, т. е. является элементом пространства Π. Для выполнения последнего условия оказывается необходимым, чтобы входящие в Lu функция u и коэффициенты были определены не только на отрезке $[x_1, x_n]$, но и на несколько расширенном, иначе говоря, окаймленном отрезке $[a, b]$. Множество функций дискретного аргумента, определенных на отрезке $[a, b]$, в котором скалярное произведение и норма такие же, как в соответствующем пространстве Π, будем называть пространством Π'. Вид окаймленного отрезка $[a, b]$, а следовательно, и пространства Π' существенно зависит от рассматриваемого конечноразностного оператора Lu. В общем случае можно сказать, что число точек, входящих в отрезок $[a, b]$, будет равно $n + r$, где r — порядок конечноразностного оператора Lu. Например, для операторов второго порядка (51) и (52) окаймленным отрезком будет $[x_0, x_{n+1}]$, для оператора первого порядка $-\Delta u_\kappa = u_{\kappa+1} - u_\kappa$, определенного на отрезке $[x_1, x_n]$, окаймленным отрезком $[a, b]$ будет $[x_1, x_{n+1}]$.

Пусть $v(x)$ — произвольная функция дискретного аргумента, определенная на достаточно большом отрезке, содержащем отрезок $[x_1, x_n]$.

Линейный конечноразностный оператор Lu четного порядка $2q$, определенный на отрезке $[x_1, x_n]$, будем называть самосопряженным в смысле Лагранжа, если $2q$-кратное суммирование по частям выражения (v, Lu) приводит к равенству

$$\sum_{\kappa=1}^{n} v_\kappa L u_\kappa = \Gamma_n(u, v) - \Gamma_1(u, v) + \sum_{\kappa=1}^{n} u_\kappa L v_\kappa \tag{59}$$

или

$$(v, Lu) - (u, Lv) = \Gamma_n(u, v) - \Gamma_1(u, v), \tag{59'}$$

где $\Gamma_n(u, v)$ и $\Gamma_1(u, v)$ — вполне определенные линейные выражения относительно значений u и v в точках некоторой окрестности x_n и, соответственно, в точках некоторой окрестности x_1.

Например, из формул (53), (54) и (56') видно, что операторы $'d^2u$, $'d[p'du]$ и $'d^4u$, определенные, соответственно, равенствами (51), (52) и (55), будут самосопряженными в смысле Лагранжа.

Точно так же самосопряженными в смысле Лагранжа будут конечноразностные операторы следующего вида:

$$Lu = Lu_\kappa = {}'d^2u_\kappa - q_\kappa u_\kappa = (u_{\kappa+1} - 2u_\kappa + u_{\kappa-1}) - q_\kappa u_\kappa, \tag{60}$$

$$\begin{gathered} Lu = Lu_\kappa = {}'d[p_\kappa{}'du_\kappa] - q_\kappa u_\kappa = \\ = (p_\kappa u_{\kappa+1} - p_{\kappa-1}u_\kappa) - (p_\kappa u_\kappa - p_{\kappa-1}u_{\kappa-1}) - q_\kappa u_\kappa, \end{gathered} \tag{61}$$

$$\begin{gathered} Lu = Lu_\kappa = {}'d^4u_\kappa - q_\kappa u_\kappa = (u_{\kappa+2} - 4u_{\kappa+1} + \\ + 6u_\kappa - 4u_{\kappa-1} + u_{\kappa-2}) - q_\kappa u_\kappa, \end{gathered} \tag{62}$$

где $q_\kappa = q(x_\kappa)$ — заданная функция дискретного аргумента. При этом в формуле (59) или (59') для операторов (60), (61), (62) соответственно будет

$$\Gamma_n(u, v) = u_{n+1}v_n - u_nv_{n+1}, \quad \Gamma_1(u, v) = u_1v_0 - u_0v_1; \tag{60'}$$

$$\Gamma_n(u, v) = p_n(u_{n+1}v_n - u_nv_{n+1}), \quad \Gamma_1(u, v) = p_0(u_1v_0 - u_0v_1); \tag{61'}$$

$$\begin{gathered} \Gamma_n(u, v) = u_{n+2}v_n - v_{n+2}u_n + u_{n+1}(v_{n-1} - 4v_n) - v_{n+1}(u_{n-1} - 4u_n), \\ \Gamma_1(u, v) = u_2v_0 - v_2u_0 + u_1(v_{-1} - 4v_0) - v_1(u_{-1} - 4u_0). \end{gathered} \tag{62'}$$

п. 3. **Самосопряженные конечноразностные краевые задачи. Матрицы типа *П*.** Пусть $Lu = Lu_\kappa$ — линейный конечноразностный оператор, определенный на отрезке $[x_1, x_n]$, r — порядок этого оператора, $[a, b]$ — соответствующий окаймленный отрезок.

Рассмотрим конечноразностное уравнение

$$Lu_\kappa = f_\kappa, \tag{63}$$

где $f_\kappa = f(x_\kappa)$ — заданная функция дискретного аргумента, определенная на отрезке $[x_1, x_n]$.

Конечноразностную краевую задачу для уравнения (63) для отрезка $[a, b]$ в общем случае можно сформулировать следующим образом.

Требуется найти на отрезке $[a, b]$ функцию дискретного аргумента $u(x)$, удовлетворяющую в точках отрезка $[x_1, x_n]$ уравнению

$$Lu_\kappa = f_\kappa$$

и подчиненную краевым условиям

$$R_1(u) = \gamma_1, \quad R_2(u) = \gamma_2, \quad \ldots, \quad R_r(u) = \gamma_r, \tag{64}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ — заданные постоянные, а $R_1(u), R_2(u), \ldots, R_r(u)$ — операторы краевых условий, представляющие собой заданные линейные выражения относительно значений $u(x)$ в тех или иных точках отрезка $[a, b]$.

Очевидно, что краевая задача (63), (64) без особого труда приводится к краевой задаче при однородных краевых условиях

$$Lu_к = f_к, \qquad (63)$$

$$R_1(u) = 0, \quad R_2(u) = 0, \; \ldots, \; R_r(u) = 0, \qquad (64')$$

так как для этого достаточно только функцию $u(x)$ заменить функцией $u(x) + v(x)$, где $v(x)$ — функция, удовлетворяющая краевым условиям (64), а $u(x)$ — новая неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению (63) при, быть может, измененной правой части.

Пусть в уравнении (63) Lu есть оператор четного порядка $r = 2q$, самосопряженный в смысле Лагранжа. Краевые условия (64′) при этом будем называть самосопряженными, если для всяких функций дискретного аргумента на отрезке $[a, b]$ $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющих краевым условиям (64′), левая часть формулы (59′) равна нулю. Если в задаче (63), (64′) оператор Lu самосопряженный и краевые условия самосопряженные, то данную задачу будем называть самосопряженной конечноразностной краевой задачей.

Рассмотрим некоторые общие вопросы, связанные с самосопряженной конечноразностной краевой задачей для отрезка $[a, b]$:

$$Lu_к = f_к, \qquad (65)$$

$$R_1(u) = 0, \; R_2(u) = 0, \; \ldots, \; R_{2q}(u) = 0, \qquad (65'),$$

где $2q$ — порядок оператора $Lu_к$, определенного на отрезке $[x_1\, x_n]$, $f_к$ — заданная функция, принадлежащая пространству $П$.

Характерным свойством всякой самосопряженной задачи (65), (66) является то, что для всяких функций $u(x)$ и $v(x)$, принадлежащих пространству $П'$ и удовлетворяющих краевым условиям (65′), имеет место равенство

$$\sum_{к=1}^{n} (v_к L u_к - u_к L v_к) = 0 \qquad (66)$$

или

$$(v, Lu) = (u, Lv). \qquad (66')$$

По самой постановке задачи (65), (65′) решение этой задачи должно находиться в пространстве $П'$. Однако, как правило, краевые условия (65′) позволяют выразить значения искомой функции $u(x)$ в точках отрезка $[a, b]$, не принадлежащих отрезку $[x_1, x_n]$, в виде линейных комбинаций значений функции $u(x)$ в точках отрезка $[x_1, x_n]$. Подставляя эти линейные комбинации в уравнение (65), получаем систему n линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функции $u(x)$ из пространства $П$. Эту систему уравнений можно записать в векторной форме:

$$П\vec{u} = \vec{f}, \qquad (67)$$

где $\vec{u}$ и $\vec{f}$ — n-мерные векторы

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n), \tag{67'}$$

Π — вполне определенная матрица порядка n.

Матрицы вида $\varrho^{-1}\Pi$, где Π — матрица уравнения (67), или, что все равно, самосопряженной конечноразностной задачи (65), (65'), а ϱ — диагональная матрица с положительными элементами, будем называть матрицами типа Π.

Оказывается, что для всевозможных матриц типа Π можно установить ряд замечательных свойств, которые непосредственно вытекают из соответствующих свойств самосопряженных конечноразностных краевых задач и до некоторой степени аналогичны свойствам эрмитовых матриц.

п. 4. **Собственные числа и собственные функции дискретного аргумента.** Установим некоторые общие свойства собственных чисел и собственных функций самосопряженных конечноразностных краевых задач.

Пусть дана самосопряженная краевая задача для отрезка $[a, b]$:

$$Lu_\kappa - \lambda\varrho_\kappa u_\kappa = 0, \tag{68}$$

$$R_1(u) = 0, \quad R_2(u) = 0, \ \ldots, \ R_{2q}(u) = 0, \tag{68'}$$

где Lu_κ, $R_1(u)$, $R_2(u)$, ..., $R_{2q}(u)$ — то же, что и в задаче (65), (65'), λ — числовой параметр, ϱ_κ — функция дискретного аргумента, определенная и положительная на отрезке $[x_1, x_n]$.

Собственной функцией в пространстве Π' задачи (68), (68') будем называть всякое решение этой задачи, определенное на отрезке $[a, b]$ и не равное нулю, тождественно на отрезке $[x_1, x_n]$. Собственной функцией в пространстве Π задачи (68), (68') будем называть функцию дискретного аргумента, определенную на отрезке $[x_1, x_n]$ и совпадающую на этом отрезке с соответствующей собственной функцией в пространстве Π'. Числовые значения параметра λ, при которых существуют собственные функции, будем называть собственными числами задачи (68), (68'). Иногда вместо указанных собственных чисел и собственных функций будем говорить о собственных числах, собственных функциях в пространстве Π' и собственных функциях в пространстве Π самосопряженного оператора Lu_κ при самосопряженных краевых условиях (68').

Собственные числа и собственные функции всякой самосопряженной конечноразностной краевой задачи (68), (68') обладают следующими свойствами.

а) Общее количество различных собственных чисел не больше n.

В самом деле, если из краевых условий (68') определить $2q$ значений функции $u(x)$ на отрезке $[a, b]$ и подставить в уравнение (68), то краевая задача (68), (68') будет эквивалентна системе n

линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Определитель этой системы будет многочленом относительно параметра λ степени n и, следовательно, имеет не более n различных корней.

б) Собственные функции $u(x)$ и $u'(x)$ в пространстве Π, соответствующие различным собственным числам λ и λ', ортогональны с весом $\varrho(x)$, т. е.

$$(\varrho u,\ u') = \sum_{\kappa=1}^{n} \varrho_\kappa u_\kappa u'_\kappa = 0.$$

В самом деле, умножая скалярно равенства

$$Lu_\kappa - \lambda\varrho_\kappa u_\kappa = 0, \qquad Lu'_\kappa - \lambda'\varrho_\kappa u'_\kappa = 0$$

соответственно на $u'(x)$ и $u(x)$ и затем вычитая одно равенство из другого, получаем

$$(u',\ Lu) - (u,\ Lu') - (\lambda - \lambda')(\varrho u,\ u') = 0.$$

Отсюда в силу (66′) имеем

$$(\lambda - \lambda')(\varrho u,\ u') = 0.$$

и, поскольку $\lambda - \lambda' = 0$, получаем $(\varrho u,\ u') = 0$.

в) Все собственные числа вещественны.

В самом деле, если бы существовало комплексное собственное число λ с собственной функцией $u(x)$ в пространстве Π, то комплексно-сопряженное с ним число $\bar{\lambda}$ тоже было бы собственным числом с собственной функцией $\bar{u}(x)$. Из условия ортогональности

$$(\varrho u,\ \bar{u}) = \sum_{\kappa=1}^{n} \varrho_\kappa u_\kappa \bar{u}_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{n} \varrho_\kappa |u_\kappa|^2 = 0$$

имеем $u(x) \equiv 0$ на отрезке $[x_1,\ x_n]$. Это значит, что λ не является собственным числом.

Краевую задачу (68), (68′) в силу (67) можно записать в виде

$$\Pi\vec{u} = \lambda\varrho\vec{u}, \tag{69}$$

где ϱ — диагональная матрица n-го порядка

$$\varrho = [\varrho_1,\ \varrho_2,\ \ldots,\ \varrho_n]. \tag{69′}$$

Отсюда следует, что собственные числа и собственные векторы матрицы $\varrho^{-1}\Pi$ типа Π совпадают с собственными числами и собственными векторами в пространстве Π самосопряженной краевой задачи (68), (68′) и, следовательно, обладают свойствами а), б), в).

В частности, собственные числа и собственные векторы матрицы Π совпадают с собственными числами и собственными векторами задачи (68), (68′) при $\varrho_\kappa \equiv 1$.

п. 5. Матрицы простой структуры. Основное свойство матриц типа *П*. Условимся всякую прямоугольную матрицу

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} \tag{70}$$

записывать в виде

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m], \tag{70'}$$

где $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ — n-мерные векторы

$$\vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{70''}$$

Через A^*, как и принято, будем обозначать матрицу, транспонированную по отношению к матрице A, т. е. получающуюся из нее переменой местами строк и столбцов.

Две квадратные матрицы A и B называются подобными, если существует неособенная матрица V такая, что

$$A = VBV^{-1}. \tag{71}$$

Характеристическим многочленом квадратной матрицы $A = [a_{ij}]_1^n$ называется определитель матрицы $A - \lambda E$, где λ — числовой параметр, E — единичная матрица n-го порядка. Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические определители; две матрицы, подобные третьей матрице, подобны между собой.

Матрица, подобная диагональной матрице, называется матрицей простой структуры. Характерным свойством матриц простой структуры является то, что всякая матрица A такого вида может быть представлена в форме

$$A = U\Lambda U^{-1}, \tag{72}$$

где U — так называемая фундаментальная матрица

$$U = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n], \tag{72'}$$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ — n линейно независимых собственных векторов матрицы A, Λ — диагональная матрица собственных чисел

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n], \tag{72''}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A, соответствующие собственным векторам $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$.

Собственные числа квадратной матрицы определяются как корни ее характеристического уравнения. В связи с этим отметим одну теорему, имеющую важное значение для теории симметричных матриц (см. [35]).

Теорема 1. Пусть

$$D_0(\lambda) = 1, \quad D_1(\lambda) = a_{11} - \lambda, \quad D_2(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \tag{73}$$

Тогда, если определитель $D_n(\lambda)$ является вещественным и симметричным, то все его корни вещественны. Между любыми двумя различными корнями $D_n(\lambda)$ имеется по крайней мере один корень $D_{n-1}(\lambda)$. Если λ является корнем $D_n(\lambda)$ кратности κ, то λ будет корнем $D_{n-1}(\lambda)$ по крайней мере $(\kappa - 1)$-ой кратности.

Установим теперь один общий результат, относящийся к введенным выше матрицам типа Π.

Предположим, что матрица типа Π n-го порядка $\varrho^{-1}\Pi$ является матрицей простой структуры, тогда, как показано в п. 4, собственные векторы матрицы $\varrho^{-1}\Pi$, соответствующие ее различным собственным числам, будут ортогональны с весом $\varrho(x)$. Если одному и тому же собственному числу матрицы $\varrho^{-1}\Pi$ соответствуют несколько линейно независимых собственных векторов, то, применяя к ним известный способ ортогонализации, можно считать их тоже ортогональными с весом $\varrho(x)$. Построенные указанным способом ортогональные собственные векторы матрицы $\varrho^{-1}\Pi$ можно нормировать так, чтобы норма каждого из них равнялась единице.

Таким образом, мы приходим к теореме, характеризующей матрицы типа Π.

Теорема 2. Если матрица n-го порядка $\varrho^{-1}\Pi$ является матрицей типа Π простой структуры, то соответствующая ей фундаментальная матрица может быть записана в виде

$$U = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n], \tag{74}$$

где $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ — ее собственные векторы, ортонормированные с весом $\varrho(x)$, т. е. удовлетворяющие условиям

$$(\varrho\vec{u}_\kappa, \vec{u}_m) = \begin{cases} 1, & \kappa = m, \\ 0, & \kappa \neq m. \end{cases} \tag{75}$$

При этом имеют место равенства

$$U^*\varrho U = E, \quad U^{-1} = U^*\varrho, \tag{76}$$

$$\varrho^{-1}\Pi = U\Lambda U^*\varrho, \tag{77}$$

где Λ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $\varrho^{-1}\Pi$

Отметим, что матрица A называется ортогональной или унитарной, если $A^*A = E$. Аналогично будем говорить, что матрица U ортогональна или унитарна с весом $\varrho = [\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n]$, если

$$U^*\varrho U = E. \tag{78}$$

Утверждение теоремы 2 состоит в том, что фундаментальная матрица, соответствующая матрице типа Π, будет ортогональной с весом ϱ.

п. 6. Общая задача о собственных числах и собственных функциях для конечноразностных уравнений второго порядка. Пусть дана конечноразностная краевая задача для отрезка $[a, b] = [x_0, x_{n+1}]$:

$$\tilde{L}u_\kappa = Lu_\kappa - \lambda\varrho_\kappa u_\kappa = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{79}$$

$$R_1(u) = p_0(u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha) = 0,$$

$$R_2(u) = p_n(u_{n+1}\cos\beta + u_n \sin\beta) = 0, \tag{79'}$$

где α и β — заданные постоянные ($0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 2\pi$), λ — числовой параметр, ϱ_κ — заданная функция дискретного аргумента, определенная и положительная на отрезке $[x_1, x_n]$, Lu_k — самосопряженный конечноразностный оператор второго порядка, определенный на отрезке $[x_1, x_n]$,

$$Lu_\kappa = {'d}[p_\kappa {'d}u_\kappa] - q_\kappa u_\kappa = (p_\kappa u_{\kappa+1} - p_{\kappa-1}u_\kappa) -$$

$$- (p_\kappa u_\kappa - p_{\kappa-1}u_{\kappa-1}) - q_\kappa u_\kappa, \tag{61}$$

q_k — функция дискретного аргумента, определенная на отрезке $[x_1, x_n]$, p_κ — функция дискретного аргумента, определенная на отрезке $[x_0, x_n]$. При этом функцию p_κ мы будем считать положительной, за исключением, быть может, точек x_0 и x_n, в которых она предполагается неотрицательной.

Покажем, что краевая задача (79), (79′) является самосопряженной краевой задачей.

В самом деле, формула (59′), в соответствии с (61) и (61′), для оператора $\tilde{L}u = \tilde{L}u_\kappa$ запишется в виде

$$(v, \tilde{L}u) - (u, \tilde{L}v) = \Gamma_n(u, v) - \Gamma_1(u, v), \tag{80}$$

где

$$\Gamma_n(u, v) = p_n(u_{n+1}v_n - u_n v_{n+1}),$$

$$\Gamma_1(u, v) = p_0(u_1 v_0 - u_0 v_1). \tag{61'}$$

Если $p_0 = 0$, то $R_1(u) = 0$ при любых значениях u_0 и u_1. Тогда при любых значениях u_0, u_1 и v_0, v_1 будет $\Gamma_1(u, v) = 0$. При $p_0 \neq 0$ из условий $R_1(u) = 0$, $R_1(v) = 0$ имеем

$$\cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0, \quad v_0 \cos\alpha + v_1 \sin\alpha = 0.$$

Отсюда находим $\Gamma_1(u, v) = 0$. Так же убеждаемся, что из условий $R_2(u) = 0$, $R_2(v) = 0$ следует, что $\Gamma_n(u, v) = 0$. Это означает, что равенство (80) для любых функций $u(x)$ и $v(x)$ из пространства Π', удовлетворяющих краевым условиям (79′), принимает вид

$$(v, \tilde{L}u) - (u, \tilde{L}v) = 0. \tag{80'}$$

Этим самосопряженность краевой задачи (79), (79′) доказана.

Из самосопряженности задачи (79), (79′) следует, что собственные числа и собственные функции этой задачи обладают свойствами а), б), в), указанными в п. 3, т. е.

а) количество различных собственных чисел не больше n;

б) собственные функции в пространстве Π, соответствующие различным собственным числам, ортогональны с весом $\varrho(x)$;

в) все собственные числа вещественны.

Установим теперь некоторые дополнительные свойства собственных чисел и собственных функций задачи (79), (79′) в предположении, что

$$\cos\alpha \neq 0, \quad \cos\beta \neq 0, \quad p_0 \neq 0, \quad p_n \neq 0. \tag{79''}$$

При выполнении этих условий из (79′) находим $u_0 = -u_1 \operatorname{tg}\alpha$, $u_{n+1} = -u_n \operatorname{tg}\beta$. Подставляя это в уравнение (79), получаем систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную задаче (79), (79′), (79″):

$$\Pi\vec{u} = \lambda\varrho\vec{u}, \tag{81}$$

где $\vec{u}$ — n-мерный вектор, определенный равенством (67′), ϱ — диагональная матрица n-го порядка, определенная равенством (69′), $\varrho^{-1}\Pi$ — вполне определенная матрица типа Π

$$\Pi = \begin{bmatrix} -(p_0+p_1+q_1+p_0\operatorname{tg}\alpha) & p_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ p_1 & -(p_1+p_2+q_2) & -p_2 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & p_2 & -(p_2+p_3+q_3) & p_3 + & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & p_{n-2} & -(p_{n-2}+p_{n-1}+q_{n-1}) & p_{n-1} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & & p_{n-1} & -(p_{n-1}+p_n+q_n+p_n\operatorname{tg}\beta) \end{bmatrix} \tag{82}$$

Собственные числа и собственные функции задачи (79), (79′), (79‴) будут совпадать с собственными числами и собственными векторами матрицы $\varrho^{-1}\Pi$. Характеристический многочлен матрицы $\varrho^{-1}\Pi$

имеет вид

$$D(\lambda)=\begin{bmatrix} a_1-\lambda & p_1\varrho_1^{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_1\varrho_2^{-1} & a_2-\lambda & p_2\varrho_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2\varrho_3^{-1} & a_3-\lambda & p_3\varrho_3^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & p_{n-2}\varrho_{n-1}^{-1} & a_{n-1}-\lambda & p_{n-1}\varrho_{n-1}^{-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p_{n-1}\varrho_n^{-1} & a_n-\lambda \end{bmatrix} \qquad (83)$$

где

$$a_1=-(p_0+p_1+q_1+p_0\operatorname{tg}\alpha)\varrho_1^{-1},$$
$$a_2=-(p_1+p_2+q_2)\varrho_2^{-1},\quad a_3=-(p_2+p_3+q_3)\varrho_3^{-1},\ \dots,$$
$$\dots,\ a_{n-1}=-(p_{n-2}+p_{n-1}+q_{n-1})\varrho_{n-1}^{-1},$$
$$a_n=-(p_{n-1}+p_n+q_n+p_n\operatorname{tg}\beta)\varrho_n^{-1}. \qquad (83')$$

Полагая

$$D_0(\lambda)=1,\qquad D_1(\lambda)=a_1-\lambda,$$
$$D_2(\lambda)=\begin{vmatrix} a_1-\lambda, & p_1\varrho_1^{-1} \\ p_1\varrho_2^{-1} & a_2-\lambda\end{vmatrix},\ \dots,\ D_n(\lambda)=D(\lambda),$$

можно без особого труда показать, что характеристический многочлен $D(\lambda)$ имеет n различных вещественных корней.

В самом деле, учитывая рекуррентное соотношение

$$D_\kappa(\lambda)=(a_\kappa-\lambda)D_{\kappa-1}(\lambda)-p_{\kappa-1}^2\varrho_\kappa^{-1}\varrho_{\kappa-1}^{-1}D_{\kappa-2}(\lambda)$$
$$(\kappa=2,\ 3,\ \dots,\ n), \qquad (84)$$

видим, что последовательность многочленов

$$D_n(\lambda),\quad D_{n-1}(\lambda),\ \dots,\ D_0(\lambda) \qquad (85)$$

обладает двумя свойствами ряда Штурма:

1°. $D_0\lambda$ сохраняет знак $(D_0(\lambda)\equiv 1)$;

2°. При обращении $D_\kappa(\lambda)$ в нуль $(1<\kappa<n)$ многочлены $D_{\kappa+1}(\lambda)$ и $D_{\kappa-1}(\lambda)$ отличны от нуля и имеют разные знаки.

В силу того, что

$$D_\kappa(\lambda)=(-\lambda)^\kappa+\dots$$

в ряду (85) при λ достаточно большом положительном будет n перемен знака, а при λ достаточно большом отрицательном — ни одной. Таким образом, при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ ряд (85) приобретает n перемен знака. Приведем простые рассуждения, позволяющие применить к ряду (85) известное правило Штурма.

При непрерывном изменении λ число перемен знака в ряде (85) может меняться только при переходе через корни многочлена $D_\kappa(\lambda)$ $(\kappa=1,\ 2,\ \dots,\ n)$. Допустим λ_0 — корень многочлена $D_\kappa(\lambda)$

$(1 < \kappa < n)$, ε — достаточно малое положительное число. В ряду $D_{\kappa+1}(\lambda_0 - \varepsilon)$, $D_\kappa(\lambda_0 - \varepsilon)$, $D_{\kappa-1}(\lambda_0 - \varepsilon)$ и в ряду $D_{\kappa+1}(\lambda_0 + \varepsilon)$, $D_\kappa(\lambda_0 + \varepsilon)$, $D_{\kappa-1}(\lambda_0 - \varepsilon)$ будет только по одной перемене знака. Поэтому изменение числа перемен знака в ряду (85) может происходить только при переходе через корень многочлена $D_n(\lambda)$ и, следовательно, этих корней должно быть не меньше n. Причем, при переходе через каждый корень многочлена $D_n(\lambda)$ ряд (85) приобретает одну перемену знака.

Таким образом, используя 1° и 2°, приходим к следующим выводам:

3°. Все корни многочлена $D_n(\lambda)$ вещественны и различны.

4°. При переходе λ (в положительном направлении) через корень многочлена $D_n(\lambda)$ произведение $D_n(\lambda)\ D_{n-1}(\lambda)$ меняет знак с $+$ на $-$.

5°. Между каждыми двумя соседними корнями многочлена $D_n(\lambda)$ лежит один и только один корень многочлена $D_{n-1}(\lambda)$.

6°. Число корней многочлена в интервале (α, β), $(\alpha < \beta)$ равно приращению числа перемен знака в ряду (85) при изменении от α до β.

Найдем теперь собственный вектор $\vec{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ матрицы $\varrho^{-1}\Pi$, соответствующий собственному числу λ.

Уравнение (81), записанное в координатной форме, имеет вид

$$\begin{aligned} &(a_1 - \lambda)\, u_1 + p_1 \varrho_1^{-1} u_2 = 0, \\ &p_1 \varrho_2^{-1} u_1 + (a_2 - \lambda)\, u^2 + p_2 \varrho_2^{-1} u_3 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &p_{n-1} \varrho_n^{-1} u_{n-1} + (a_n - \lambda)\, u_n = 0. \end{aligned} \tag{81'}$$

Поскольку $D_n(\lambda) = 0$, а $D_{n-1}(\lambda) \neq 0$, то первые $n - 1$ уравнений (81′) линейно независимы, а последнее из уравнений (81′) является их следствием.

Рассмотрим поэтому сначала $n - 1$ уравнений

$$p_{k-1} \varrho_\kappa^{-1} u_{\kappa-1} + (a_\kappa - \lambda)\, u_\kappa + p_\kappa \varrho_\kappa^{-1} u_{\kappa+1} = 0 \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots, n-1,\ p_0 = 0). \tag{81''}$$

Полагая

$$v_1 = u_1,\ v_\kappa = (-1)^{\kappa-1} p_1 p_2 \ldots p_{\kappa-1} \varrho_1^{-1} \varrho_2^{-1} \ldots \varrho_{\kappa-1}^{-1} u_\kappa \qquad (\kappa = 2, 3, \ldots, n),$$

имеем

$$v_{\kappa+1} = (a_\kappa - \lambda)\, v_\kappa - p_{\kappa-1}^2 \varrho_{\kappa-1}^{-1} \varrho_\kappa^{-1} v_{\kappa-1} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n;\ v_0 = 0). \tag{86}$$

Рекуррентное соотношение (86) совпадает с рекуррентным соотношением (84). Поэтому, полагая

$$v_1 = CD_0(\lambda), \quad v_2 = CD_1(\lambda) \quad (C = \text{const}),$$

получаем

$$v_\kappa = CD_{\kappa-1} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, компоненты собственного вектора $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ матрицы $\varrho^{-1}\Pi$, соответствующие ее собственному числу λ, будут определяться равенствами

$$u_\kappa = CD_{\kappa-1}(\lambda)\, p_1^{-1} p_2^{-1} \ldots p_{\kappa-1}^{-1} \varrho_1\varrho_2 \ldots \varrho_{\kappa-1}(-1)^{\kappa-1} \qquad (87)$$
$$(\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ C = \mathrm{const}).$$

Матрицы вида

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & c_{n-2} & a_{n-1} & \ldots & b_{n-1} \\ 0 \ldots 0 & \ldots & 0 & & c_{n-1} & \ldots & a_n \end{bmatrix}, \qquad (88)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_{n-1}, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ — произвольные вещественные числа, называются якобиевыми матрицами.

Если $b_\kappa c_\kappa > 0$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, n - 1)$, то матрица (88) называется якобиевой нормальной матрицей. К числу таких матриц относится рассмотренная нами матрица $\varrho^{-1}\Pi$.

Если $b_\kappa = c_\kappa = p_\kappa$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, n - 1)$, то матрица (88) называется якобиевой нормальной симметричной матрицей. К числу таких матриц относится матрица $\varrho^{-1}\Pi$ при $\varrho_\kappa \equiv 1$, или, что все равно, матрица Π.

Отметим некоторые хорошо известные свойства собственных чисел якобиевых нормальных симметричных матриц (см. [62]):

1° Собственное число λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ есть неубывающая функция от $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2°. Наименьшее собственное число λ_1 есть убывающая функция от $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$;

3°. Наибольшее собственное число λ_n есть возрастающая функция от $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Проанализировав свойства собственных чисел матрицы $\varrho^{-1}\Pi$, приходим к выводу, что конечноразностная краевая задача (79), (79'), (79'') имеет в пространстве Π n линейно независимых собственных функций, соответствующих n различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ этой задачи. Эти собственные функции ортогональны друг другу с весом $\varrho(x)$ и образуют полную систему функций в пространстве Π.

Представляя собственные функции задачи (79), (79'), (79'') в виде n-мерных векторов

$$\vec{u}_j = \{u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}\} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (89)$$

можем считать их ортонормированными с весом $\varrho(x)$, т. е. удовлетворяющими условиям

$$(\varrho\vec{u}_m, \vec{u}_j) = \begin{cases} 1 & m = j \\ 0 & m \neq j, \end{cases} \tag{89'}$$

в противном случае достаточно было бы $\vec{u}$ умножить на нормирующий множитель

$$\|\vec{u}_j\|^{-1} = (\varrho\vec{u}_j, \vec{u}_j)^{-\frac{1}{2}}.$$

Если известны собственные числа и собственные ортонормированные с весом $\varrho(x)$ функции (89), то при $\lambda \neq \lambda_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) можно сразу же записать решение конечноразностной краевой задачи для уравнения

$$\tilde{L}u_\kappa = Lu_\kappa - \lambda\varrho_\kappa u_\kappa = f_\kappa \tag{90}$$

при краевых условиях (79′) и (79″). Пользуясь обозначениями (67′), можем положить

$$\vec{u} = A_1\vec{u}_1 + A_2\vec{u}_2 + \ldots + A_n\vec{u}_n, \tag{91}$$

$$\vec{f} = B_1\varrho\vec{u}_1 + B_2\varrho\vec{u}_2 + \ldots + B_n\varrho\vec{u}_n, \tag{91'}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — неопределенные постоянные, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — известные постоянные

$$B_j = (\vec{f}, \vec{u}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{92}$$

Подставляя (91), (91′) в уравнение (90) и учитывая, что $L\vec{u}_j = \lambda_j\varrho\vec{u}_j$, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(\lambda_j - \lambda)\varrho\vec{u}_j = \sum_{j=1}^{n} B_j\varrho\vec{u}_j. \tag{92'}$$

Из (92′) находим искомое решение задачи для уравнения (90) при λ, отличном от собственного числа, в виде

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{\lambda_j - \lambda}\vec{u}_j. \tag{93}$$

При λ, совпадающем с одним из собственных чисел, для существования решения краевой задачи (90), (79′), (79″) необходимо и достаточно, как видно из (92′), чтобы выполнялось условие

$$(\vec{f}, \vec{u}_m) = 0. \tag{90'}$$

При выполнении этого условия решение указанной задачи существует и записывается в виде

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_j}{\lambda_j - \lambda} \vec{u}_j + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{B_j}{\lambda_j - \lambda} \vec{u}_j + C\vec{u}_m, \tag{93'}$$

где C — произвольная постоянная.

§ 3. РЕШЕНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТРИЦ В ЯВНОМ ВИДЕ

В алгебре хорошо известны общие методы определения собственных чисел и собственных векторов матриц простой структуры. Однако эти чисто алгебраические методы, очень удобные при решении вопросов существования и единственности, оказываются не совсем удобными для получения решения задачи о собственных числах и собственных векторах матрицы в явной форме. Возможно, что отчасти этим можно объяснить то, что в довольно обширной литературе по теории матриц и ее применениям (см., например,[62]—[66]) приводится очень мало конкретных матриц, для которых собственные числа и фундаментальные матрицы построены в явном виде. Хорошо известной, например, является одна матрица, для которой решение задачи о собственных числах и собственных векторах найдено в явной форме.

Эта матрица имеет такой вид:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & 0 & \ldots\ldots & & & 0 \\ -b & a & -b & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & -b & a & -b & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -b & a & -b \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -b & a \end{bmatrix}, \tag{94}$$

где a и b — произвольные заданные числа.

Однако для нашей цели вопрос о нахождении в явном и довольно простом виде собственных чисел и фундаментальных матриц для довольно широкого класса матриц простой структуры имеет принципиальное значение. Некоторые результаты в этом направлении, необходимые для дальнейшего, как будет показано ниже, удается получить применением общей теории, построенной в § 2, к отдельным конкретным конечноразностным краевым задачам.

1°. Найдем собственные числа и ортонормированные собственные функции краевой задачи

$$u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} - \lambda u_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{95}$$

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = 0. \tag{95_1}$$

Уравнение (95) совпадает с уравнением (25) при $a = 1 + \frac{\lambda}{2}$, $b = 1$, $Q \equiv 0$. Возьмем в соответствии с формулой (27) общее решение уравнения (95) в виде

$$u_i = C_1 \cos i\Theta + C_2 \sin i\Theta \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1), \tag{96}$$

где C_1, C_2— постоянные, $\Theta = \arccos\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$.

Первое из краевых условий (95_1) дает $C_1 = 0$.

Второе из краевых условий (95_1) приводит к равенству

$$\sin (n+1)\Theta = 0$$

или

$$T^2_{n+1}\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) - 1 = 0,$$

где $T_{n+1}(x) = \cos (n+1) \arccos x$ — полином Чебышева $(n+1)$ степени. Корни уравнения $T_{n+1}(x) - 1 = 0$ находятся очень просто (см., например, [67]) и имеют вид $x_j = \cos \frac{j\pi}{n+1}$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Поэтому собственными числами задачи (95), (95_1) будут

$$\lambda_j = 2\left(\cos \frac{j\pi}{n+1} - 1\right) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{97}$$

Собственными функциями будут

$$\sin i \frac{j\pi}{n+1} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 i\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (1 - \cos i2\alpha) =$$

$$= \frac{n+1}{2} - \sum_{i=0}^{n} \cos i2\alpha = \frac{n+1}{2} - \frac{\sin (n+1)\alpha \cos n\alpha}{\sin \alpha}.$$

Полагая здесь $\alpha = \frac{j\pi}{n+1}$, получаем

$$\left\| \sin i \frac{j\pi}{n+1} \right\|^2 = \frac{n+1}{2}.$$

Поэтому искомая ортонормированная система собственных функций задачи (95), (95_1) имеет вид

$$\varphi_j(x_i) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin i \frac{j\pi}{n+1}$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1). \tag{98}$$

Найдем теперь для матрицы порядка n

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{99}$$

диагональную матрицу собственных чисел

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \tag{100}$$

и фундаментальную матрицу

$$P = [\vec{p}_1\ \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n]. \tag{101}$$

Очевидно, что матрица $T-2E$ совпадает с матрицей типа Π самосопряженной краевой задачи (95), (95_1).

Поэтому собственные числа матрицы (99), или, что все равно, элементы диагональной матрицы (100), будут определяться равенствами

$$\lambda_j = 2\cos j\gamma, \quad \gamma = \frac{\pi}{n+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{100'}$$

Собственные векторы матрицы T или столбцы ее фундаментальной матрицы P определяются равенствами

$$\vec{p}_j = \sqrt{\frac{2}{n+1}}(\sin j\gamma, \sin 2j\gamma, \ldots, \sin nj\gamma). \tag{101''}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Фундаментальную матрицу P можно также записать в виде

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\sin i\frac{j\pi}{n+1}\right]_1^n, \tag{101'''}$$

при этом, очевидно, будет иметь место равенство

$$P^2 = E. \tag{102}$$

Отметим, что матрица (94), встречавшаяся в литературе ранее, представима в виде $A = aE - bT$. Таким образом, очень просто приходим к выводу, что фундаментальной матрицей для нее будет матрица P, а собственные числа определяются равенствами

$$\lambda_j = a - b\,2\cos j\gamma \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

2°. Требуется найти собственные числа и ортонормированные собственные функции самосопряженной краевой задачи

$$u_{\kappa+1} - 2u_\kappa + u_{\kappa-1} - \lambda u_\kappa = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{95}$$

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1}\cos\beta + u_n\sin\beta = 0, \quad |\operatorname{tg}\beta| \leqslant 1. \tag{95$_2$}$$

Берем общее решение уравнения (95) на отрезке $[x_0, x_{n+1}]$ в виде (96) и подставляем в краевые условия (95_2). Таким образом, получаем уравнения

$$C_1 = 0, \quad \cos\beta\, C_2 \sin(n+1)\Theta + \sin\beta\, C_2 \sin n\Theta = 0,$$

или

$$\frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin n\Theta} = -\operatorname{tg}\beta. \tag{103}$$

При $0<\Theta<\pi$ нулями функции $\sin(n+1)\Theta$ будут $\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}\pi$, а нулями функции $-\operatorname{tg}\beta \sin n\Theta$ будут $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\pi$.

Следовательно, при $|\operatorname{tg}\beta| \leqslant 1$ графики этих функций в интервале $0 < \Theta < \pi$ будут пересекаться в n различных точках. Это означает, что уравнение (103) имеет n различных корней. Поэтому собственные числа задачи (95), (95_2) запишутся в виде

$$\lambda_j = 2(\cos\Theta_j - 1) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{104}$$

где Θ_j — корни уравнения (103) в интервале $0 < \Theta < \pi$.

Собственными функциями задачи (95), (95_2) будут

$$\sin i\Theta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Система собственных ортонормированных функций задачи (95), (95_2) имеет вид

$$\varphi_j(x_i) = C_j \sin i\Theta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (i = 0, 1, \ldots, n+1), \tag{105}$$

где C_j — постоянные

$$C_j = (\sin i\Theta_j, \quad \sin i\Theta_j)^{-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sin^2 i\Theta_j\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{105'}$$

Найдем теперь для матрицы порядка n

$$T_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -\operatorname{tg}\beta \end{vmatrix}, \tag{106}$$

где β — любое число такое, что

$$|\operatorname{tg}\beta| \leqslant 1, \tag{106'}$$

диагональную матрицу собственных чисел

$$\Lambda_1 = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \tag{107}$$

и фундаментальную матрицу

$$P_1 = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n]. \tag{108}$$

В силу того, что $T_1 - 2E$ совпадает с матрицей краевой задачи (95), (95_2), для элементов матрицы (107) имеем равенство

$$\lambda_j = 2\cos\Theta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{107'}$$

где Θ_j — n различных корней уравнения (103) в интервале $0 < \Theta < \pi$.

Собственные векторы матрицы T_1 или столбцы ее фундаментальной матрицы P_1 определяются равенствами

$$\vec{P}_j = C_j(\sin\Theta_j, \quad \sin 2\Theta_j, \ldots, \sin n\Theta_j), \tag{108'}$$

где C_j — постоянные, определенные равенствами (105').

Матрицу P_1 можно записать в виде

$$P_1 = [C_j \sin i\Theta_j]_1^n. \tag{108''}$$

При этом будет иметь место равенство

$$P_1^* P_1 = E\ . \tag{109}$$

3°. Найдем собственные числа и ортонормированные собственные функции самосопряженной краевой задачи

$$u_{\kappa+1} - 2u_\kappa + u_{\kappa-1} - \lambda u_\kappa = 0 \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{95}$$

$$u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0,\ \ u_{\kappa+1} = 0 \quad |\operatorname{tg}\alpha| \leqslant 1. \tag{95$_3$}$$

Подставляя (96) в (95_3), получаем уравнения

$$C_1 \cos\alpha + (C_1 \cos\Theta + C_2 \sin\Theta)\sin\alpha = 0,$$
$$C_1 \cos(n+1)\Theta + C_2 \sin(n+1)\Theta = 0.$$

Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение относительно C_1 и C_2, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha + \sin\alpha\cos\Theta & \sin\alpha\sin\Theta \\ \cos(n+1)\Theta & \sin(n+1)\Theta \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\cos\alpha\cdot\sin(n+1)\Theta + \sin\alpha[\sin(n+1)\Theta\cos\Theta -$$
$$- \cos(n+1)\Theta\sin\Theta] = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin n\Theta} = -\operatorname{tg}\alpha. \tag{110}$$

Следовательно, собственные числа задачи (95), (95_3) запишутся в виде

$$\lambda_j = 2(\cos\Theta_j - 1) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{111}$$

где Θ_j — различные корни уравнения (110) в интервале $0 < \Theta < \pi$.

Учитывая равенство

$$C_1 \cos(n+1)\Theta_j + C_2 \sin(n+1)\Theta_j = 0,$$

собственные функции задачи (95), (95_3) можно записать в виде

$$\sin(n+1-i)\Theta_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Ортонормированная система собственных функций этой задачи будет иметь вид

$$\varphi_j(x_i) = C_j \sin(n+1-i)\Theta_j$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1), \tag{112}$$

где C_j — постоянные

$$C_j = (\sin(n+1-i)\Theta_j,\ \sin(n+1-i)\Theta_j) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sin^2(n+1-i)\Theta_j\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{112$'$}$$

Рассмотрим теперь матрицу порядка n

$$T_2 = \begin{vmatrix} -\operatorname{tg}\alpha & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (113)$$

где α — любое число такое, что

$$|\operatorname{tg}\alpha| \leqslant 1. \qquad (113')$$

В силу того, что $T_2 - 2E$ совпадает с матрицей задачи (95), (95_3), заключаем, что диагональная матрица собственных чисел матрицы T_2

$$\Lambda_2 = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \qquad (114)$$

определяется равенствами

$$\lambda_j = 2\cos\Theta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \qquad (114')$$

где Θ_j — корни уравнения (110) в интервале $0 < \Theta < \pi$.

Фундаментальная матрица

$$P_2 = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n] \qquad (115)$$

матрицы T_2 определяется равенствами

$$\vec{p}_j = C_j(\sin n\Theta_j, \sin(n-1)\Theta_j, \dots, \sin\Theta_j), \qquad (115')$$

где C_j — постоянные, определенные равенствами (112′).

Матрица P_2 может быть записана в виде

$$P_2 = [\sin(n-i)\Theta_j \cdot C_j]_1^n, \qquad (115'')$$

и для нее имеет место равенство

$$P_2^* P_2 = E. \qquad (116)$$

4°. Решим вопрос о нахождении собственных чисел и ортонормированных собственных функций самосопряженной краевой задачи

$$u_{\kappa+1} - 2u_\kappa + u_{\kappa-1} - \lambda u_\kappa = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n), \qquad (95)$$
$$u_0\cos\alpha + u_1\sin\alpha = 0, \qquad u_{n+1}\cos\beta + u_n\sin\beta = 0$$
$$|\operatorname{tg}\alpha|, \ |\operatorname{tg}\beta| < 1. \qquad (95_4)$$

Подставляя (96) в (95_4), получаем систему уравнений с неизвестными C_1, C_2:

$$C_1\cos\alpha + (C_1\cos\Theta + C_2\sin\Theta)\sin\alpha = 0,$$
$$[C_1\cos(n+1)\Theta + C_2\sin(n+1)\Theta]\cos\beta +$$
$$+ [C_1\cos n\Theta + C_2\sin n\Theta]\sin\beta = 0,$$

или

$$C_1(\cos\alpha+\sin\alpha\cos\Theta)+C_2\sin\alpha\sin\Theta=0,$$
$$C_1[\cos\beta\cos(n+1)\Theta+\sin\beta\cos n\Theta]+$$
$$+C_2[\cos\beta\sin(n+1)\Theta+\sin\beta\sin n\Theta]=0. \qquad (117)$$

Для определителя δ этой системы имеем

$$\delta=\cos\alpha\{\cos\beta\sin(n+1)\Theta+\sin\beta\sin n\Theta\}+$$
$$+\sin\alpha\{\cos\Theta[\cos\beta\sin(n+1)\Theta+\sin\beta\sin\Theta]-$$
$$-\sin\Theta[\cos\beta\cos(n+1)\Theta+\sin\beta\cos n\Theta]\}=$$
$$=\cos\alpha[\cos\beta\sin(n+1)\Theta+\sin\beta\sin n\Theta]+$$
$$+\sin\alpha[\cos\beta\sin n\Theta+\sin\beta\sin(n-1)\Theta]=$$
$$=\sin(n+1)\Theta\cos\alpha\cos\beta+\sin n\Theta(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)+$$
$$+\sin(n-1)\Theta\sin\alpha\sin\beta.$$

Следовательно, для существования ненулевого решения системы уравнений (117) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sin(n+1)\Theta+\sin n\Theta(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)+$$
$$+\sin(n-1)\Theta\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0. \qquad (118)$$

Покажем, что уравнение (118) при $0<\Theta<\pi$ имеет n корней.

В самом деле, левая часть уравнения (118) является мнимой частью многочлена

$$Q(z)=z^{n+1}+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)z^n+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta z^{n-1}$$

комплексного переменного $z=re^{i\Theta}$ при $r=1$. Многочлен $Q(z)$ имеет $(n-1)$-кратный корень при $z=0$ и два корня, определяющиеся из равенства

$$z^2+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)z+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=0,$$

а именно: $z_1=-\operatorname{tg}\alpha$, $z_2=-\operatorname{tg}\beta$. Таким образом, многочлен $Q(z)$ в круге $|z|<1$ имеет $n+1$ корней и на окружности $|z|=1$ в нуль не обращается. Следовательно, по принципу аргумента (см. [68], [69]) приращение аргумента комплексной величины $w=Q(z)$, когда z описывает окружность $|z|=1$, равно $2\pi(n+1)$. При этом, очевидно, кривая $w=Q(e^{i\Theta})$ пересечет вещественную ось в плоскости w $2(n+1)$ раз. По одному пересечению будет при $\Theta=0$ и $\Theta=\pi$, и по n пересечений будет при $0<\Theta<\pi$ и $\pi<\Theta<2\pi$. Последнее, в частности, означает, что уравнение (118) при $0<\Theta<\pi$ имеет n различных корней.

Учитывая, что $\Theta=\arccos\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)$, получаем все собственные числа задачи (95), (95_4) в следующем виде:

$$\lambda_j=2(\cos\Theta_j-1)\quad(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (119)$$

где Θ_i — различные корни уравнения (118) в интервале $0<\Theta<\pi$.

Чтобы получить собственные функции задачи (95), (95_4), достаточно в (96) вместо Θ подставить Θ_j, считая, что C_1 и C_2 удовлетворяют системе уравнений (117) при $\Theta = \Theta_j$: $C_1 = -\sin\alpha \cdot \sin\Theta_j$, $C_2 = (\cos\alpha + \sin\alpha\cos\Theta_j)$. Таким образом, находим собственные функции задачи (95), (95_4) в виде

$$-\sin\alpha \cdot \sin\Theta_j \cos i\Theta_j + (\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\Theta_j)\sin i\Theta_j$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

или

$$\cos\alpha \cdot \sin i\Theta_j + \sin\alpha \sin(i-1)\Theta_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{120}$$

Собственные ортонормированные функции задачи (95), (95_4) имеют вид

$$\varphi_j(x_i) = C_j[\cos\alpha\sin i\Theta_j + \sin\alpha\sin(i-1)\Theta_j]$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1), \tag{121}$$

где C_j — постоянные

$$C_j = \left[\sum_{i=1}^{n}(\cos\alpha \cdot \sin i \cdot \Theta_j + \sin\alpha \cdot \sin(i-1)\Theta_j)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{121'}$$

Если бы мы в качестве решения системы уравнений (117) взяли

$$C_1 = \cos\beta\sin(n+1)\Theta_j + \sin\beta \cdot \sin n\Theta_j;$$
$$C_2 = -(\cos\beta\cos(n+1)\Theta_j + \sin\beta\cos n\Theta_j);$$

то получили бы собственные функции в виде

$$[\cos\beta\sin(n+1)\Theta_j + \sin\beta\sin n\Theta_j]\cos i\Theta - [\cos\beta\cos(n+1)\Theta_j + \sin\beta\cos n\Theta_j]\sin i\Theta_j$$

или

$$\cos\beta \cdot \sin(n+1-i)\Theta_j + \sin\beta\sin(n-i)\Theta_j. \tag{122}$$

Ортонормированные собственные функции при этом имели бы вид

$$\varphi_j(x_i) = C_j[\cos\beta\sin(n+1-i)\Theta_j + \sin\beta\sin(n-i)\Theta_j] \tag{123}$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1),$$

где

$$C_j = \left[\sum_{i=1}^{n}(\cos\alpha\sin(n+1-i)\Theta_j + \sin\beta\sin(n-i)\Theta_j)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{123'}$$

Таким образом, мы нашли все собственные числа и все ортонормированные собственные функции краевой задачи (95), (95_4) при условии, что $|\mathrm{tg}\alpha|$, $|\mathrm{tg}\beta| < 1$. Это же можно сделать при любых конечных значениях $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$, если брать общее решение уравнения (95) на отрезке $[x_0, x_{n+1}]$ не только для случая комплексных корней характеристического уравнения, но и в самом общем виде в соответствии с формулой (27) и таблицей 1 (см. стр. 16).

Теперь нетрудно для матрицы n-го порядка

$$T_3 = \begin{vmatrix} -\operatorname{tg}\alpha & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -\operatorname{tg}\beta \end{vmatrix}, \tag{124}$$

где α и β — любые числа, такие, что

$$|\operatorname{tg}\alpha|, \quad |\operatorname{tg}\beta| < 1, \tag{124'}$$

найти диагональную матрицу собственных чисел

$$\Lambda_3 = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \tag{125}$$

и фундаментальную матрицу

$$P_3 = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n]. \tag{126}$$

Из того, что $T_3 - 2E$ совпадает с матрицей краевой задачи (95), (95_4), заключаем, что матрица Λ_3 определяется равенствами

$$\lambda_j = 2\cos\Theta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{125'}$$

где Θ_j — n различных корней уравнения (118).

Собственные ортонормированные векторы матрицы T_3, или, что все равно, фундаментальная матрица P_3, определяются равенствами

$$\vec{p}_j = C_j(\cos\alpha\sin\Theta_j, \ \cos\alpha\cdot\sin 2\Theta_j + \sin\alpha\sin\Theta_j, \ \ldots$$
$$\ldots, \ \cos\alpha\sin n\Theta_j + \sin\alpha\sin(n-1)\Theta_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{126'}$$

где C_j — постоянные, определенные равенствами (121').

Матрицу P_3 можно записать в виде

$$P_3 = [(\cos\alpha\sin i\Theta_j + \sin\alpha\sin(i-1)\Theta_j)\,C_j]_1^n; \tag{126''}$$

для нее имеет место равенство

$$P_3^* P_3 = E. \tag{127}$$

Отметим, что указанный нами метод отыскания собственных чисел и построение фундаментальных матриц в явном виде без каких-либо изменений переносится на случай произвольных матриц $\varrho^{-1}\Pi$ простой структуры типа Π. Несколько подробнее об этом будет сказано в § 4.

§ 4. О СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА И СПЕЦИАЛЬНЫХ МАТРИЦАХ ТИПА Π

Обыкновенные дифференциальные уравнения и прежде всего второго порядка породили, как известно, много различных видов специальных функций: функции Бесселя, гипергеометрические функции, полиномы Якоби, полиномы Лагранжа, полиномы Чебышева и т. д. Эти специальные функции непрерывного аргумента приспособлены к решению отдельных классов задач математической физики и являются довольно значительной составной частью современного математического анализа (см., например, [70], [71]).

По аналогии с этим, выдвигая общую концепцию развития «анализа конечно малых», мы считаем целесообразным введение тех или иных специальных функций не непрерывного, а дискретного аргумента с таким расчетом, чтобы эти функции были приспособлены к решению достаточно широких классов задач математической физики и, по возможности, обладали простыми свойствами.

В этом параграфе мы указываем один общий принцип построения функций дискретного аргумента, связанных с конечноразностными самосопряженными операторами второго порядка, а также в связи с рассмотрением конкретных уравнений указанного типа вводим вполне определенные специальные функции дискретного аргумента первого и второго рода.

п. 1. Функции дискретного аргумента, связанные с конечноразностными операторами второго порядка. Рассмотрим еще раз краевую задачу

$$\tilde{L}u_\kappa = Lu_\kappa - \lambda\varrho_\kappa u_\kappa = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{79}$$

$$R_1(u) = p_0(u_0\cos\alpha + u_1\sin\alpha) = 0,$$

$$R_2(u) = p_n(u_{n+1}\cos\beta + u_n\sin\beta) = 0, \tag{79'}$$

$$\cos\alpha \neq 0, \quad \cos\beta \neq 0, \quad p_0 \neq 0, \quad p_n \neq 0 \tag{79''}$$

(см. § 2, п. 6).

Учитывая, что

$$Lu_\kappa = {}'d[p_\kappa{}'du_\kappa] - q_\kappa u_\kappa =$$
$$= (p_\kappa u_{\kappa+1} - p_{\kappa-1}u_\kappa) - (p_\kappa u_\kappa - p_{\kappa-1}u_{\kappa-1}) - q_\kappa u_\kappa, \tag{61}$$

запишем уравнение (79) в развернутой форме:

$$p_\kappa u_{\kappa+1} = (p_{\kappa-1} + p_\kappa + q_\kappa + \lambda\rho_\kappa)\,u_\kappa - p_{\kappa-1}u_{\kappa-1}. \tag{128}$$

Простым подбором находим, что уравнению (128) удовлетворяет функция дискретного аргумента $U_\kappa = P_\lambda(x_\kappa)$, определенная равенствами

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \quad U_2 = (p_0 + p_1 + q_1 + \lambda\varrho_1)\,p_1^{-1},$$

$$U_3 = \begin{vmatrix} (p_0 + p_1 + q_1 + \lambda\varrho_1)\,p_1^{-1} & 1 \\ p_1 p_2^{-1} & (p_1 + p_2 + q_2 + \lambda\varrho_2)\,p_2^{-1} \end{vmatrix}, \ldots, \tag{129}$$

$$U_\kappa = \begin{vmatrix} C_0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_1 p_2^{-1} & C_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 p_3^{-1} & C_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p_{\kappa-3} p_{\kappa-2}^{-1} & C_{\kappa-3} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & p_{\kappa-2} p_{\kappa-1}^{-1} & C_{\kappa-2} \end{vmatrix}$$

$$(C_i = (p_i + p_{i+1} + q_{i+1} + \lambda \varrho_{i+1}) \varrho_{i+1}^{-1},$$
$$i = 0,\ 1,\ \dots,\ \kappa - 2,\ \kappa = 4,\ 5,\ \dots)$$

Точно так же находим решение уравнения (128) или (79) в виде функции дискретного аргумента $V_\kappa = T_\lambda(x_\kappa)$, определенной равенствами

$$V_0 = 1, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = -p_0 p_1^{-1},$$

$$V_3 = \begin{vmatrix} -p_0 p_1^{-1} & 0 \\ p_1 p_2^{-1} & (p_1 + p_2 + q_2 + \lambda \varrho_2) p_2^{-1} \end{vmatrix}, \ \dots \tag{130}$$

$$V_\kappa = \begin{vmatrix} -p_0 p_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_1 p_2^{-1} & D_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2 p_3^{-1} & D_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p_{\kappa-3} p_{\kappa-2}^{-1} & D_{\kappa-3} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & p_{\kappa-2} p_{\kappa-1}^{-1} & D_{\kappa-2} \end{vmatrix}$$

$$(D_i = (p_i + p_{i+1} + q_{i+1} + \lambda \varrho_{i+1}) \varrho_{i+1}^{-1},$$
$$i = 1,\ 2,\ \dots,\ \kappa - 2;\ \kappa = 4,\ 5,\ \dots)$$

Всякое решение уравнения (128) определяется однозначно своими значениями при $\kappa = 0$ и $\kappa = 1$. Поэтому общее решение этого уравнения, или, что все равно, уравнения (79), запишется в виде

$$u_\kappa = AP_\lambda(x_\kappa) + BT_\lambda(x_\kappa) \quad (\kappa = 0,\ 1,\ \dots), \tag{131}$$

где A и B — произвольные постоянные, $P_\lambda(x_\kappa)$ и $T_\lambda(x_\kappa)$ — функции дискретного аргумента, определенные равенствами (129), (130).

Чтобы найти собственные числа краевой задачи (79), (79′), (79″), а следовательно, и матрицы типа Π, равной $\varrho^{-1}\Pi$, где Π — матрица, определенная равенством (82), достаточно подставить (131) в (79″) и потребовать, чтобы полученная таким образом система уравнений

$$B\cos\alpha + A\sin\alpha = 0, \tag{132}$$

$$\cos\beta\,(AP_\lambda(x_{n+1}) + BT_\lambda(x_{n+1})) + \sin\beta\,(AP_\lambda(x_n) + BT_\lambda(x_n)) = 0$$

допускала ненулевое решение относительно A и B. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ P_\lambda(x_{n+1})\cos\beta + P_\lambda(x_n)\sin\beta & T_\lambda(x_{n+1})\cos\beta + T_\lambda(x_n)\sin\beta \end{vmatrix} = 0$$

или

$$P_\lambda(x_{n+1}) - \operatorname{tg}\alpha\, T_\lambda(x_{n+1}) + \operatorname{tg}\beta\,[P_\lambda(x_n) - \operatorname{tg}\alpha\, T_\lambda(x_n)] = 0. \quad (133)$$

Уравнение (133) имеет n различных вещественных корней, так как собственные числа задачи (79), (79′), (79″) обязаны быть корнями уравнения (133).

Таким образом, диагональная матрица

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \quad (134)$$

матрицы типа Π, равной $\varrho^{-1}\Pi$, определяется как матрица, элементами которой являются корни уравнения (133).

Учитывая первое из равенств (133), собственные функции задачи (79), (79′), (79″) в пространстве Π, ортогональные с весом $\varrho(x)$, можем взять в виде

$$\varphi_j(x_i) = P_{\lambda_j}(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_i) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (135)$$

где λ_j — корни уравнения (133), индекс i принимает значения 1, 2, ..., n.

Ортонормированные с весом $\varrho(x)$ собственные функции задачи (79), (79′), (79″) запишутся в виде

$$\overset{*}{\varphi}_j(x_i) = C_j[P_{\lambda_j}(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_i)] \quad (136)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

где C_j — постоянные

$$C_j = (\varrho\varphi_j, \varphi_j)^{-\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \varrho_i (P_{\lambda_j}(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_i))^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (136')$$

Фундаментальная матрица

$$U = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n], \quad (137)$$

соответствующая матрице $\varrho^{-1}\Pi$, определяется равенствами

$$\vec{p}_j = C_j(P_{\lambda_j}(x_1) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_1),$$
$$P_{\lambda_j}(x_2) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_2), \ldots, P_{\lambda_j}(x_n) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_n))$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n). \quad (137')$$

При этом, в силу основной теоремы (см. §2, п. 5, теорему 2), будут иметь место равенства

$$U^*\varrho U = E, \qquad U^{-1} = U^*\varrho, \quad (76)$$
$$\varrho^{-1}\Pi = U\Lambda U^*\varrho. \quad (77)$$

Таким образом, при помощи функций дискретного аргумента $P_\lambda(x_\kappa)$ и $T_\lambda(x_\kappa)$ решается вопрос о собственных числах и собственных функциях задачи (79), (79′), (79″), а также вопрос о собственных числах матрицы $\varrho^{-1}\Pi$ типа Π и о построении соответствующей ей фундаментальной матрицы.

Функции дискретного аргумента $U_\kappa = P_\lambda(x_\kappa)$ и $V_\kappa = T_\lambda(x_\kappa)$, определенные при $\kappa = 0, 1, \ldots$ равенствами (129) и (130), обладают одним интересным свойством.

Обозначим через

$$U_{\kappa,m} = P_{\lambda,m}(x_{m+\kappa}), \quad V_{\kappa,m} = T_{\lambda,m}(x_{m+\kappa}) \tag{138}$$

функции дискретного аргумента, получающиеся соответственно из U_κ и V_κ «сдвигом фаз на m шагов». Это означает, что функции (138) определены равенствами (129) и соответственно (130), в которых вместо индексов $0, 1, \ldots, \kappa$ поставлены индексы $m, m+1, \ldots, m+\kappa$.

Очевидно, что общее решение уравнения (79) на отрезке $[x_m, \infty]\ldots$ можно записать в виде

$$u_{m+i} = AP_{\lambda,m}(x_{m+i}) + BT_{\lambda,m}(x_{m+i}) \quad (i = 0, 1, \ldots), \tag{139}$$

где A и B — произвольные постоянные. Но при $k = m, m+1, \ldots$ уравнению (79) удовлетворяют функции $P_\lambda(x_{m+i})$ и $T_\lambda(x_{m+i})$ ($i = 0$) $1, \ldots$). Подставляя эти функции в (139) и определяя постоянные A и B сравнением обеих частей равенства при $i = 0$ и $i = 1$, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} P_\lambda(x_{m+i}) &= P_\lambda(x_{m+1})\,P_{\lambda,m}(x_{m+i}) + P_\lambda(x_m)\,T_{\lambda,m}(x_{m+i}), \\ T_\lambda(x_{m+i}) &= T_\lambda(x_{m+i})\,P_{\lambda,m}(x_{m+i}) + T_\lambda(x_m)\,T_{\lambda,m}(x_{m+i}). \end{aligned} \tag{140}$$

В левых частях этих формул, как видно, стоят определители порядка $m + i - 1$, а в правых частях — определители порядков $m - 1$, m и $i - 1$.

Например, чтобы вычислить $P_\lambda(x_{21})$, т. е. соответствующий определитель (129) двадцатого порядка, достаточно, полагая $m = 10$, $i = 11$, вычислить определитель девятого порядка $P_\lambda(x_{10})$ и определители десятого порядка $P_{\lambda,m}(x_{m+11})$, $T_{\lambda,m}(x_{m+11})$ и затем подставить в первую из формул (140).

Таким образом, формулы «сдвига фаз», или формулы приведения (140), могут оказаться полезными при всевозможных расчетах и преобразованиях, связанных с введенными нами функциями дискретного аргумента $P_\lambda(x_\kappa)$ и $T_\lambda(x_\kappa)$.

п. 2. Специальные функции дискретного аргумента первого и второго рода. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} (a+\kappa)\,u_{\kappa+1} - (2a + 2\kappa - 1)\,u_\kappa + \\ + (a + \kappa - 1)\,u_{\kappa-1} - (\lambda - 2)(a+\kappa)\,u_\kappa = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \ldots), \end{gathered} \tag{141}$$

$$\begin{gathered} u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0, \quad u_{n+1}\cos\beta + u_n \sin\beta = 0, \\ \cos\alpha \cdot \cos\beta \neq 0 \end{gathered} \tag{141′}$$

и соответствующую этой задаче матрицу типа Π

$$T_4 = \varrho^{-1} \begin{vmatrix} 1-a-\mathrm{tg}\alpha & a+1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ a+1 & 1 & a+2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a+2 & 1 & a+3 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a+n-2 & 1 & a+n-1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a+n-1 & 1-(a+ \\ & & & & & & +n)\,\mathrm{tg}\beta \end{vmatrix} \qquad (142)$$

где ϱ — диагональная матрица

$$\varrho = [a+1, \quad a+2, \ \ldots, \ a+n]. \qquad (142')$$

Введем специальную функцию дискретного аргумента $P_\lambda(x_\kappa)$ при помощи следующих равенств:

$$P_\lambda(x_0) = 0, \quad P_\lambda(x_1) = 1,$$

$$P_\lambda(x_2) = \lambda - \frac{1}{a+1},$$

$$P_\lambda(x_3) = \begin{vmatrix} \lambda - \dfrac{1}{a+1} & 1 \\ \dfrac{a+1}{a+2} & \lambda - \dfrac{1}{a+2} \end{vmatrix}, \ \ldots \qquad (143)$$

$$P_\lambda(x_\kappa) = \begin{vmatrix} \lambda - \dfrac{1}{a+1} & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \dfrac{a+1}{a+2} & \lambda - \dfrac{1}{a+2} & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{a+2}{a+3} & \lambda - \dfrac{1}{a+3} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \dfrac{a+\kappa-3}{a+\kappa-2} & \lambda - \dfrac{1}{a+\kappa-2} & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \dfrac{a+\kappa-2}{a+\kappa-1} & \lambda - \dfrac{1}{a+\kappa-1} \end{vmatrix}$$

$$(\kappa = 3, \ 4, \ \ldots)$$

Так же введем функцию $T_\lambda(x_\kappa)$ при помощи равенств

$$T_\lambda(x_0) = 1, \quad T_\lambda(x_1) = 0, \quad T_\lambda(x_2) = -\frac{a}{a+1},$$

$$T_\lambda(x_3) = \begin{vmatrix} -\dfrac{a}{a+1} & 0 \\ \dfrac{a+1}{a+2} & \lambda - \dfrac{1}{a+2} \end{vmatrix}, \ \ldots \qquad (144)$$

$$T_\lambda(x_\kappa) = \begin{vmatrix} -\frac{a}{a+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{a+1}{a+2} & \lambda - \frac{1}{a+2} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{a+2}{a+3} & \lambda - \frac{1}{a+3} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{a+\kappa-3}{a+\kappa-2} & \lambda - \frac{1}{a+\kappa-2} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{a+\kappa-2}{a+\kappa-1} & \lambda - \frac{1}{a+\kappa-1} \end{vmatrix}$$

$$(\kappa = 3,\ 4,\ \dots)$$

Записав уравнение (141) в виде

$$u_\kappa = \left(\lambda - \frac{1}{a+\kappa-1}\right) u_{\kappa-1} - \frac{a+\kappa-2}{a+\kappa-1} u_{\kappa-2} \quad (\kappa = 2, 3, \dots), \tag{145}$$

сразу же убеждаемся, что функции $P_\lambda(x_\kappa)$ и $T_\lambda(x_\kappa)$ являются решениями уравнения (141).

Введенные здесь функции $P_\lambda(x_\kappa)$ и $T_\lambda(x_\kappa)$ будем называть специальными функциями дискретного аргумента, соответственно, первого и второго рода.

Общее решение уравнения (141) запишется в виде

$$u_\kappa = AP_\lambda(x_\kappa) + BT_\lambda(x_\kappa) \quad (\kappa = 0,\ 1,\ \dots), \tag{146}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Подставляя (146) в краевые условия (141'), получаем

$$B\cos\alpha + A\sin\alpha = 0, \tag{147}$$

$$\cos\beta\,[AP_\lambda(x_{n+1}) + BT_\lambda(x_{n+1})] + \sin\beta\,[AP_\lambda(x_n) + BT_\lambda(x_n)] = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем уравнение, из которого определяются все собственные числа задачи (141), (141') и матрицы T_4:

$$P_\lambda(x_{n+1}) - \operatorname{tg}\alpha\, T_\lambda(x_{n+1}) + \operatorname{tg}\beta\,(P_\lambda(x_n) - \operatorname{tg}\alpha\, T_\lambda(x_n)) = 0 \tag{148}$$

Собственные ортонормированные с весом $\varrho(x)$ функции задачи (141), (141') имеют вид

$$\varphi_j(x_i) = C_j\,[P_{\lambda_j}(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_i)] \quad (j = 1,\ 2,\ \dots,\ n), \tag{149}$$

где λ_j — корни уравнения (148), $i = 1, 2, \dots, n$, C_j — постоянные

$$C_j = \left[\sum_{i=1}^{n} (P_{\lambda_j}(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_i))^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{149'}$$

Фундаментальная матрица

$$P_4 = [\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \dots,\ \vec{p}_n], \tag{150}$$

соответствующая матрице T_4, определяется равенствами

$$\vec{p}_j = C_j (P_{\lambda_j}(x_1) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_1),\quad P_{\lambda_j}(x_2) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_2),\ \ldots$$
$$\ldots,\ P_{\lambda_j}(x_n) - \operatorname{tg}\alpha\, T_{\lambda_j}(x_n)) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{151}$$

При этом будут иметь место равенства

$$T_4 = P_4 \Lambda_4 P_4^* \varrho, \quad P_4^* \varrho P_4 = E, \tag{152}$$

где Λ_4 — диагональная матрица собственных чисел матрицы T_4, определяемых как корни уравнения (148).

Обозначим теперь через $P_{\lambda,m}(x_{m+\kappa})$ и $T_{\lambda,m}(x_{m+\kappa})$ функции дискретного аргумента, которые получаются из $P_\lambda(x_\kappa)$ и $T_\lambda(x_\kappa)$ сдвигом фазы на m шагов. Это означает, что

$$T_{\lambda,m}(x_m) = 1, \quad T_{\lambda,m}(x_{m+1}) = 0, \quad T_{\lambda,m}(x_{m+2}) = -\frac{a+m}{a+m+1},$$

и при $\kappa = 3,\ 4,\ \ldots$ $P_{\lambda,m}(x_{m+\kappa})$, $T_{\lambda,m}(x_{m+\kappa})$ получаются в виде определителей (143) и, соответственно, (144), в которых вместо a подставлено $a + m$.

Общее решение уравнения (141) на отрезке $[x_m \infty]$ запишется в виде

$$u_{m+i} = AP_{\lambda,m}(x_{m+i}) + BT_{\lambda,m}(x_{m+i}) \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{153}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Так же, как и в п. 1, убеждаемся, что для введенных здесь специальных функций дискретного аргумента первого и второго рода имеют место следующие формулы приведения:

$$P_\lambda(x_{m+\kappa}) = P_\lambda(x_{m+1}) \cdot P_{\lambda,m}(x_{m+\kappa}) + P_\lambda(x_m)\, T_{\lambda,m}(x_{m+\kappa}), \tag{154}$$
$$T_\lambda(x_{m+\kappa}) = T_\lambda(x_{m+1})\, P_{\lambda,m}(x_{m+\kappa}) + T_\lambda(x_m)\, T_{\lambda,m}(x_{m+\kappa})$$
$$(\kappa = 0,\ 1,\ \ldots).$$

п. 3. Частный случай. Рассмотрим уравнение, связанное с оператором (61):

$$\kappa u_{\kappa+1} - (2\kappa - 1) u_\kappa + (\kappa - 1) u_{\kappa-1} - \lambda u_\kappa = 0 \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{155}$$

Введем функцию дискретного аргумента $Q_\lambda(x_\kappa)$, определенную при $x \geqslant x_0$ равенствами

$$Q_\lambda(x_0) = 0, \quad Q_\lambda(x_\kappa) = \frac{1}{(\kappa-1)!} e^{-\lambda} \frac{d^{\kappa-1}}{d\lambda^{\kappa-1}} (\lambda^{\kappa-1} e^\lambda) \tag{156}$$
$$(\kappa = 1,\ 2,\ \ldots),$$

или в развернутом виде

$$Q_\lambda(x_0) = 0, \quad Q_\lambda(x_\kappa) = 1 + \binom{\kappa-1}{1}\frac{\lambda}{1!} + \binom{\kappa-1}{2}\frac{\lambda^2}{2!} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\lambda^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{156'}$$

Покажем, что функция $u_\kappa = Q_\lambda(x_\kappa)$ является решением уравнения (155).

Обозначая левую часть уравнения (155) через D_κ, имеем

$$D(1)=0,\quad D_\kappa = \kappa\left[1+\binom{\kappa}{1}\frac{\lambda}{1!}+\binom{\kappa}{2}\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}\right]+$$
$$+(1-2\kappa-\lambda)\left[1+\binom{\kappa-1}{1}\frac{\lambda}{1!}+\binom{\kappa-1}{2}\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}\right]+$$
$$+(\kappa-1)\left[1+\binom{\kappa-2}{1}\frac{\lambda}{1!}+\binom{\kappa-2}{2}\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^{\kappa-2}}{(\kappa-2)!}\right]=0.$$

В соответствии с общеизвестными методами, зная одно решение уравнения (155), можно без труда построить его общее решение.

Согласно (11) имеем

$$u_{\kappa+1}=(\Delta^2+2\Delta+1)\,u_{\kappa-1},\quad u_\kappa=(\Delta+1)\,u_{\kappa-1};$$

уравнение (155) запишется в виде

$$[\kappa(\Delta^2+2\Delta+1)+(-\lambda-2\kappa+1)(\Delta+1)+\kappa-1]\,u_{\kappa-1}=0$$

или
$$[\kappa\Delta^2+(1-\lambda)\Delta-\lambda]\,u_{\kappa-1}=0\quad(\kappa=1,\ 2,\ \ldots). \tag{157}$$

Полагая $u_{\kappa-1}=U_{\kappa-1}V_{\kappa-1}$, имеем

$$\Delta(U_{\kappa-1}V_{\kappa-1})=U_{\kappa-1}\Delta V_{\kappa-1}+V_\kappa\Delta U_{\kappa-1}. \tag{158}$$

Далее

$$\Delta^2(U_{\kappa-1}V_{\kappa-1})=\Delta(U_{\kappa-1}\Delta V_{\kappa-1})+\Delta(\Delta U_{\kappa-1}V_\kappa)=$$
$$=U_{\kappa-1}\Delta^2V_{\kappa-1}+\Delta V_\kappa\Delta U_{\kappa-1}+\Delta U_{\kappa-1}\Delta V_\kappa+V_{\kappa+1}\Delta^2U_{\kappa-1}$$

или

$$\Delta^2(U_{\kappa-1}V_{\kappa-1})=\Delta^2U_{\kappa-1}\cdot V_{\kappa+1}+2\Delta U_{\kappa-1}\cdot\Delta V_\kappa+U_{\kappa-1}\Delta^2V_{\kappa-1}. \tag{158'}$$

Подставляя это в уравнение (157), получаем

$$\kappa V_{\kappa+1}\Delta^2U_{\kappa-1}+[2\kappa\Delta V_\kappa+(1-\lambda)V_\kappa]\,\Delta U_{\kappa-1}+$$
$$+U_{\kappa-1}[\kappa\Delta^2V_{\kappa-1}+(1-\lambda)\Delta V_{\kappa-1}-\lambda V_{\kappa-1}]=0. \tag{157'}$$

Полагая теперь $V_{\kappa-1}=Q_\lambda(x_{\kappa-1})$, получаем для определения $U_{\kappa-1}$ уравнение первого порядка

$$\kappa V_{\kappa+1}\Delta^2U_{\kappa-1}+[2\kappa\Delta V_\kappa+(1-\lambda)V_\kappa]\,\Delta U_{\kappa-1}=0. \tag{159}$$

Полагая $\omega_{\kappa-1}=\Delta U_{\kappa-1}$, уравнение (159) можем записать в виде

$$\Delta\omega_{\kappa-1}+Q_{\kappa-1}\omega_{\kappa-1}=0\quad(\kappa=1,\ 2,\ \ldots), \tag{160}$$

или

$$\omega_\kappa=(1-Q_{\kappa-1})\,\omega_{\kappa-1}\quad(\kappa=1,\ 2,\ \ldots), \tag{160'}$$

где

$$Q_{\kappa-1}=\frac{(2\kappa+1-\lambda)\,T_\lambda(x_\kappa)-2\kappa T_\lambda(x_{\kappa-1})}{\kappa P_\lambda(x_{\kappa+1})}. \tag{161}$$

Решение уравнения (160') запишется следующим образом:

$$\omega_\kappa=\omega_0\prod_{j=1}^{\kappa}(1-Q_{j-1}). \tag{162}$$

Отсюда имеем

$$U_{i+1}-U_i=\omega_0\prod_{j=1}^{i}(1-Q_{j-1}).$$

Полагая здесь $i = 1, 2, \ldots, \kappa - 2$ и суммируя, находим

$$U_{\kappa-1} = U_1 + \omega_0 \sum_{i=1}^{\kappa-2} \prod_{j=1}^{i} (1 - Q_{j-1}).$$

Следовательно, частным решением уравнения (155) будет

$$u_{\kappa-1} = \left[U_1 + \omega_0 \sum_{i=1}^{\kappa-2} \prod_{j=1}^{i} (1 - Q_{j-1})\right] Q_\lambda (x_{\kappa-1}).$$

Общее решение уравнения (155) запишется в виде

$$u_\kappa = C_1 Q_\lambda (x_\kappa) + C_2 Q_\lambda (x_\kappa) \sum_{i=1}^{\kappa-1} \prod_{j=1}^{i} (1 - Q_{j-1}), \tag{163}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Отметим, что в силу (52')

$$\frac{'d\,[p_\kappa' du_\kappa]}{h^2} - \frac{\lambda}{h^2} u_\kappa = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_{x=x_\kappa} - \frac{\lambda}{h^2} u_\kappa + 0(h).$$

Поэтому уравнение (128) аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - \frac{\lambda}{h^2} u = 0, \tag{164}$$

общее решение которого записывается в виде (см. [72])

$$u(x) = C_1 J_0 \left(\frac{2}{h}\sqrt{-\lambda x}\right) + C_2 N_0 \left(\frac{2}{h}\sqrt{-\lambda x}\right), \tag{165}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, J_0 и N_0 — бесселевы функции нулевого порядка первого и второго рода.

Рассмотрим теперь краевую задачу для уравнения (155) при краевом условии

$$u_0 \neq \infty, \quad u_{n+1} = 0 \tag{155'}$$

и соответствующую матрицу типа Π

$$T_5 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \kappa-1 & -(2\kappa-1) & \kappa & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & n-2 & -(2(n-1)-1) & n-1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & n-1 & -(2n-1) \end{vmatrix} \tag{166}$$

Для того, чтобы функция дискретного аргумента $Q_\lambda(x_\kappa)$ была собственной функцией краевой задачи (155), (155′), достаточно, чтобы

$$Q_\lambda(x_{n+1}) = 0 \tag{167}$$

или

$$\frac{1}{n!} e^{-\lambda} \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda^n e^\lambda) = 0. \tag{167′}$$

Но $Q_\lambda(x_{n+1})$, или, что все равно, левая часть уравнения (167); будучи рассматриваема как функция непрерывного аргумента — λ, представляет собой полином Чебышева—Лагерра степени n (см., например, [23]). Применяя к функции $\lambda^n e^{-\lambda}$ теорему Ролля, можно легко убедиться, что все корни полинома Чебышева—Лагерра вещественны, положительны и различны. Таким образом, приходим к следующему выводу.

Собственные числа краевой задачи (155), (155′), или, что все равно, матрицы T_5 отрицательны и равны корням полинома Чебышева—Лагерра n-ой степени, взятым с обратным знаком.

Собственные ортонормированные функции краевой задачи (155), (155′) имеют вид

$$\varphi_j(x_i) = C_j Q_{\lambda_j}(x_i) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \ (i = 0, 1, \ldots, n+1), \tag{168}$$

где — λ_j — корни полинома Чебышева—Лагерра n-ой степени, C_j — постоянные

$$C_j = (Q_{\lambda_j}, Q_{\lambda_j})^{-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} Q^2_{\lambda_j}(x_i)\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{168′}$$

Собственные ортонормированные векторы матрицы T_5 и, следовательно, ее фундаментальная матрица

$$P_5 = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n] \tag{169}$$

определяются равенствами

$$\vec{p}_j = C_j (Q_{\lambda_j}(x_1), Q_{\lambda_j}(x_2), \ldots, Q_{\lambda_j}(x_n))$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n). \tag{169′}$$

Рассмотрим еще краевую задачу для уравнения (155) при краевых условиях

$$u_0 \neq \infty, \quad u_{n+1} \cos\alpha + u_n \sin\alpha = 0, \quad \cos\alpha \neq 0 \tag{155″}$$

и соответствующую матрицу типа П

$$T_6 = \left|\begin{array}{cccccccc}
-1 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
1 & -3 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & 2 & -5 & 3 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & 0 & \kappa-1 & -(2\kappa-1) & \kappa & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & n-2 & -(2(n-1)-1) & n-1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & n-1 & -(2n-1)-n\,\mathrm{tg}\,\alpha
\end{array}\right| \qquad (170)$$

Для того, чтобы функция $Q_\lambda(x_\kappa)$ была собственной функцией задачи (128), (128''), достаточно, чтобы

$$\cos\alpha\, Q_\lambda(x_{n+1}) + \sin\alpha\, Q_\lambda(x_n) = 0. \qquad (171)$$

Это уравнение эквивалентно равенству

$$\cos\alpha \frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^n e^\lambda) + \sin n\alpha \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}(\lambda^{n-1} e^\lambda) = 0$$

или

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\{[(n+\lambda)\cos\alpha + n\sin\alpha]\,\lambda^{n-1}e^\lambda\} = 0. \qquad (171')$$

Функция $\Phi(\lambda) = [(n+\lambda)\cos\alpha + n\sin\alpha]\,\lambda^{n-1}e^\lambda$ имеет нуль порядка $n-1$ при $\lambda = 0$, нуль первого порядка при $\lambda = -n(1 + \mathrm{tg}\,\alpha)$ и нуль бесконечного порядка при $\lambda = -\infty$. Применяя к функции $\Phi(\lambda)$ теорему Ролля, убеждаемся, что уравнение (171) или (171') имеет n различных вещественных корней.

Таким образом, приходим к следующему выводу.

Собственные числа задачи (155), (155''), а следовательно, и матрицы T_6 λ_j

$$(j = 1, 2, \ldots n) \qquad (172)$$

определяются как корни уравнения (171) или (171').

Собственные ортонормированные функции задачи (155), (155'') определяются равенствами

$$\varphi_j(x_i) = C_j Q_{\lambda_j}(x_i) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (173)$$

где C_j — постоянные

$$C_j = (Q_{\lambda_j}, Q_{\lambda_j})^{-\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} Q^2_{\lambda_j}(x_i)\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (173')$$

Собственные векторы, а следовательно, и фундаментальная матрица

$$P_6 = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n] \tag{174}$$

матрицы T_6 определяются равенствами

$$\vec{p}_j = C_j (Q_{\lambda_j}(x_1), Q_{\lambda_j}(x_2), \ldots, Q_{\lambda_j}(x_n)), \tag{174'}$$

где λ_j — корни уравнения (171), C_j — постоянные, определенные равенствами (173').

ГЛАВА 2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

При приближенном решении краевых задач для уравнений в частных производных математической физики, особенно эллиптического типа, путем сведения их к соответствующим конечноразностным задачам приходится численно решать, как правило, очень большое количество линейных алгебраических уравнений. Это часто оказывается связанным со значительными трудностями. Довольно убедительно об этом говорят материалы сессии АН СССР, посвященной вопросам автоматизации производства [1]. Об этом же свидетельствует, например, высказывание в книге [2]: «Для получения значений функций $u(x, y)$ в узлах сетки достаточно воспользоваться теоремой Крамера о решении систем линейных алгебраических уравнений с помощью определителей. Однако для того, чтобы получить значения неизвестной функции $u(x, y)$ с достаточной точностью, нужно использовать сетку с достаточно мелким шагом, число узлов которой может достигать нескольких сотен. Решение систем такого порядка «точными» алгебраическими методами — задача невыполнимая. Поэтому вопрос об эффективном решении уравнений в конечных разностях приобретает принципиальное значение. Для решения уравнений в конечных разностях в настоящее время применяются исключительно методы последовательных приближений, но все они страдают одним существенным недостатком. С уменьшением шага сетки, что вызывается желанием уменьшить погрешность замены дифференциальных уравнений уравнениями в конечных разностях, не только растет число узлов, в которых нужно определять значения потенциала, но и резко падает скорость сходимости последовательных приближений, и, вообще говоря, при стремлении шага

[1] См., например, выступление А. А. Дородницына — «Для решения методом конечных разностей задач об атомном реакторе потребовалось применить сетку с числом узлов в несколько миллионов, но существующие вычислительные машины пасуют уже перед решением столь громоздкой задачи» [1].

сетки к нулю все процессы последовательных приближений перестают сходиться. Это обстоятельство вызвано тем фактом, что при стремлении шага сетки к нулю также стремится к нулю и определитель системы уравнений в конечных разностях».

В этой главе для некоторых операторов в частных конечных разностях, связанных с уравнениями в частных производных математической физики, устанавливаются специальные формулы — «формулы суммарных представлений», которые позволяют в довольно простом виде записывать решения соответствующих систем алгебраических уравнений или сводить их к системам с небольшим количеством уравнений.

§ 1. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

п. 1. Решение двумерных краевых задач. В плоскости независимых переменных x и y будем пользоваться прямоугольной равномерной сеткой $x_i = x_0 + ih$, $y_\kappa = y_0 + \kappa h_1$, $(i, \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где h — шаг сетки по x, h_1 — шаг сетки по y, $(h, h_1 > 0)$, (x_0, y_0) — заданная точка. Полагая $\frac{h}{h_1} = \gamma$, конечноразностный оператор Лапласа $\Delta_h u$, построенный по пяти точкам, можно записать в виде шаблона (см. [35]):

$$\Delta_h u = \frac{1}{h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \gamma^2 & \\ \hline 1 & -2(1+\gamma^2) & 1 \\ \hline & \gamma^2 & \\ \hline \end{array}\; u \tag{1}$$

При этом для всякой функции $v(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные по x и y до четвертого порядка, в точках сетки имеет место равенство

$$\Delta_h v = \Delta v + 0(h^2 + h_1^2), \tag{2}$$

где

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Под прямоугольником D в дальнейшем будем понимать совокупность точек-узлов (x_i, y_κ) $(i = 0, 1, \ldots, m+1;\ \kappa = 0, 1, \ldots, n+1)$. При этом точки (x_i, y_κ) $(i = 1, 2, \ldots, m;\ \kappa = 1, 2, \ldots, n)$ будем называть внутренними, точки (x_i, y_0), (x_i, y_{n+1}) $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — контурными по горизонтали, точки (x_0, y_κ), (x_{m+1}, y_κ),

($\kappa = 1, 2, \ldots, n$) — контурными по вертикали, точки (x_0, y_0), (x_{m+1}, y_0), (x_{m+1}, y_{m+1}), (x_0, y_{n+1}) — контурными угловыми. На рис. 1 обозначены внутренние точки кружочками, контурные по вертикали — треугольниками, контурные по горизонтали — крестиками.

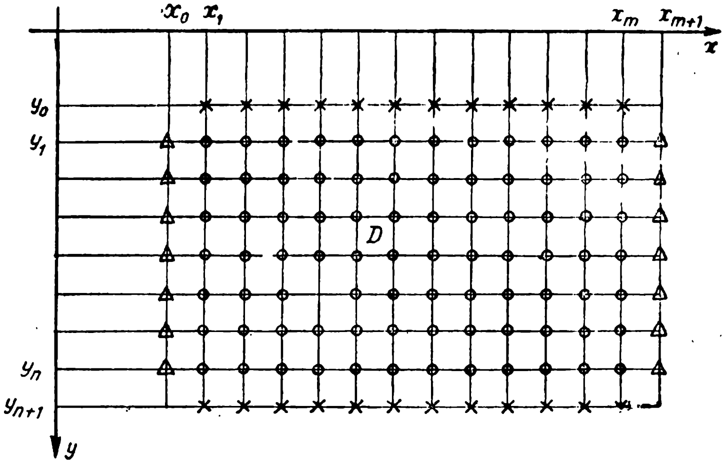

Рис. 1.

Введем обозначения

$$u_\kappa(x) = u(x, y_\kappa), \quad f_\kappa(x) = f(x, y_\kappa) \quad (\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

где $u(x, y)$ и $f(x, y)$ — функции от x и y, и n-мерные векторы

$$\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)), \quad \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)), \tag{4}$$

$$\vec{\omega}(x) = (u_0(x), 0, \ldots, 0, u_{n+1}(x)). \tag{5}$$

Введем далее скалярные величины

$$a = 1 + \gamma^2 + \lambda h^2, \quad \lambda_\kappa = \cos\kappa\frac{\pi}{n+1},$$

$$(\lambda^2 = \mathrm{const} > 0, \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

и матрицу n-го порядка (см. (101″), гл. 1, §3)

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\sin i\frac{\kappa\pi}{n+1}\right]_1^n. \tag{7}$$

Теорема 1. Для общего решения конечноразностного уравнения

$$\Delta_h u - 2\lambda u = f(x, y) \tag{8}$$

в прямоугольнике D (без учета его контурных угловых точек имеет место равенство

$$\vec{u}(x_i) = P\vec{A}(x_i) + P\vec{B}(x_i) + P\vec{\Omega}(x_i), \tag{9}$$

где $\vec{A}(x_i)$, $\vec{B}(x_i)$, $\vec{\Omega}(x_i)$ — n-мерные векторы

$$\vec{A}(x_i) = (A_\kappa \varphi_\kappa(x_i))_1^n, \quad \vec{B}(x_i) = (B_\kappa \psi_\kappa(x_i))_1^n, \tag{10}$$

$$\vec{\Omega}(x_0) = 0, \ \vec{\Omega}(x_1) = 0, \ \vec{\Omega}(x_i) = (\Omega_\kappa(x_i))_1^n = \tag{11}$$

$$= \sum_{p=1}^{p=i-1} G(i-p)\, P\,[h^2\vec{f}(x_p) - \gamma^2\vec{\omega}(x_p)],$$

A_κ, B_κ — произвольные вещественные постоянные, а функции $\varphi_\kappa(x_i)$, и диагональная матрица n-го порядка

$$G(i) = [G_\kappa(i)]_1^n \tag{12}$$

в зависимости от величин

$$\eta_\kappa = a - \lambda_\kappa\gamma^2 \qquad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{13}$$

определяются формулами, указанными в таблице 1.

Таблица 1

	$\varphi_\kappa(x_i)$	$\psi_\kappa(x_i)$	$G_\kappa(i)$	
$\lvert\eta_\kappa\rvert > 1$	μ_κ^i	ν_κ^i	$(\mu_\kappa^i - \nu_\kappa^i)(\mu_\kappa - \nu_\kappa)^{-1}$	$\mu_\kappa = \eta_\kappa + \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1}$
$\lvert\eta_\kappa\rvert = 1$	μ_κ^i	$i\mu_\kappa^i$	$i\mu_\kappa^{i-1}$	$\nu_\kappa = \eta_\kappa - \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1}$
$\lvert\eta_\kappa\rvert < 1$	$\cos i\theta_\kappa$	$\sin i\theta_\kappa$	$\sin i\theta_\kappa(\sin\theta_\kappa)^{-1}$	$\theta_\kappa = \arccos\eta_\kappa$

Примечание. Векторы $\vec{A}(x_i)$ и $\vec{B}(x_i)$, определенные равенствами (10), можно также записать в виде

$$\vec{A}(x_i) = \Phi(i)\vec{A}, \quad \vec{B}(x_i) = \Psi(i)\vec{B}, \tag{10'}$$

где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ — векторы произвольных постоянных

$$\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n), \quad \vec{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n), \tag{10''}$$

$\Phi(i)$ и $\Psi(i)$ — диагональные матрицы

$$\Phi(i) = [\varphi_1(x_i), \varphi_2(x_i), \ldots, \varphi_n(x_i)],$$

$$\Psi(x_i) = [\psi_1(x_i), \psi_2(x_i), \ldots, \psi_n(x_i)]. \tag{10'''}$$

Для доказательства теоремы, пользуясь оператором

$$Ru_\kappa(x) = u_\kappa(x+2h) - 2au_\kappa(x+h) + u_\kappa(x), \tag{14}$$

уравнение в частных конечных разностях (8) запишем в виде

$$Ru_{\kappa}(x) + \gamma^2 u_{\kappa-1}(x+h) + \gamma^2 u_{\kappa+1}(x+h) = h^2 f_{\kappa}(x+h)$$
$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} &Ru_1(x) + \gamma^2 u_2(x+h) = h^2 f_1(x+h) - \gamma^2 u_0(x+h);\\ &Ru_2(x) + \gamma^2 u_1(x+h) + \gamma^2 u_3(x+h) = h^2 f_2(x+h);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &Ru_{n-1}(x) + \gamma^2 u_{n-2}(x+h) + \gamma^2 u_n(x+h) = h^2 f_{n-1}(x+h);\\ &Ru_n(x) + \gamma^2 u_{n-1}(x+h) = h^2 f_n(x+h) - \gamma^2 u_{n+1}(x+h). \end{aligned} \tag{15'}$$

При помощи матрицы n-го порядка

$$T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1\\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{16}$$

систему уравнений (15) можно записать в векторной форме

$$R\vec{u}(x) + \gamma^2 T\vec{u}(x+h) = h^2\vec{f}(x+h) - \gamma^2\vec{\omega}(x+h). \tag{17}$$

Для матриц P и T имеют место равенства (см. гл. 1, §3)

$$P^2 = E, \quad T = P\Lambda P, \tag{18}$$

где E — единичная матрица порядка n, Λ — диагональная матрица n-го порядка

$$\Lambda = 2[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]. \tag{19}$$

Условившись под P-трансформацией какого-либо n-мерного вектора $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ понимать вектор, определенный равенством

$$\vec{\hat{\sigma}} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \ldots, \hat{\sigma}_n) = P\vec{\sigma}, \tag{20}$$

уравнение (17) можем записать в виде

$$R\vec{\hat{u}}_{\kappa}(x) + \gamma^2\Lambda\vec{\hat{u}}(x+h) = h^2\vec{\hat{f}}(x+h) - \gamma^2\vec{\hat{\omega}}(x+h), \tag{21}$$

или в развернутой форме

$$R\hat{u}_{\kappa}(x) + 2\gamma^2\lambda_{\kappa}\hat{u}_{\kappa}(x+h) = h^2\hat{f}_{\kappa}(x+h) - \gamma^2\hat{\omega}_{\kappa}(x+h) \tag{21'}$$
$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Учитывая (14), каждое из уравнений (21′) можем представить в виде

$$\hat{u}_\kappa(x+2h) - 2\eta_\kappa \hat{u}_\kappa(x+h) + \hat{u}_\kappa(x) = \\ = h^2 \hat{f}_\kappa(x+h) - \gamma^2 \hat{\omega}_\kappa(x+h). \qquad (21'')$$

При $|\eta_\kappa| > 1$ общим решением уравнения (21″) будет

$$\hat{u}_\kappa(x_i) = A_\kappa \mu_\kappa^i + B_\kappa \nu_\kappa^i + \\ + \sum_{p=1}^{p=i-1} \frac{\mu_\kappa^i - \nu_\kappa^i}{\mu_\kappa - \nu_\kappa} [h^2 \hat{f}_\kappa(x_p) - \gamma^{2'} \hat{\omega}_\kappa(x_p)], \qquad (22)$$

где A_κ, B_κ — произвольные вещественные постоянные, последняя сумма правой части равенства считается равной нулю при $i=0; 1$.

При $|\eta_\kappa| = 1$ общее решение уравнения (21″) имеет вид

$$\hat{u}_\kappa(x_i) = A_\kappa \mu_\kappa^i + B_\kappa i \mu_\kappa^i + \\ + \sum_{p=1}^{p=i-1} (i-p)\mu_\kappa^{i-p-1} [h^2 \hat{f}_\kappa(x_p) - \gamma^2 \hat{\omega}_\kappa(x_p)], \qquad (22')$$

где A_κ, B_κ — то же, что и в (22), и последняя сумма считается равной нулю при $i = 0;\ 1$.

При $|\eta_k| < 1$ общим решением уравнения (21″) будет

$$\hat{u}_\kappa(x_i) = A_\kappa \cos i\Theta_\kappa + B_\kappa \sin i\Theta_\kappa + \qquad (22'') \\ + \sum_{p=1}^{p=i-1} \frac{\sin(i-p)\Theta_\kappa}{\sin\Theta_\kappa} [h^2 \hat{f}_\kappa(x_p) - \gamma^2 \hat{\omega}_\kappa(x_p)],$$

где A_κ, B_κ — то же, что и в (22), последняя сумма правой части равенства равна нулю при $i = 0;\ 1$.

Объединяя равенства (22), (22′), (22″), получаем общее решение системы уравнений (21′), или, что все равно, векторного уравнения (21) в прямоугольнике D

$$\vec{\hat{u}}(x_i) = \vec{A}(x_i) + \vec{B}(x_i) + \sum_{p=1}^{p=i-1} G(i-p)[h^2 \vec{\hat{f}}_\kappa(x_p) - \gamma^2 \vec{\hat{\omega}}(x_p)] \qquad (23)$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m+1),$$

где последняя сумма считается равной нулю при $i = 0;\ 1$.

Умножая обе части равенства (23) на матрицу P, получаем формулу «суммарных представлений» (9). Этим теорема 1 доказана.

Дадим теперь применение формулы (9) к решению задачи Дирихле для той или иной области G

$$\Delta v - 2\lambda v = f(x, y), \quad (\lambda^2 = \text{const} \geqslant 0), \tag{24}$$

$$v/\dot{\dot{S}} = \beta(s), \tag{25}$$

где $\beta(s)$ — заданная функция длины дуги s контура S, ограничивающего область G.

Приближенное решение задачи (24), (25) будем искать в виде решения конечноразностной задачи

$$\Delta_h u - 2\lambda u = f(x, y), \tag{8}$$

$$u/\dot{\dot{S}} = \beta(s). \tag{8'}$$

Собственными числами задачи (8), (8′) будут такие значения $\lambda' = 2\lambda$, при которых задача имеет ненулевое решение при условии, что $f(x, y) \equiv 0$, $\beta(s) \equiv 0$.

а) Допустим вначале, что область G совпадает с прямоугольником D (см. рис. 1). В этом случае в силу (8′) n-мерный вектор $\vec{\omega}(x_p)$ ($p = 1, 2, \ldots, m$) известен и формула (9) определяет решение уравнения (8) во внутренних точках прямоугольника D и его контурных точках по вертикали через $2n$ постоянных A_κ, B_κ, ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$). Для определения этих постоянных достаточно воспользоваться краевым условием (8′) в контурных точках по вертикали. Полагая в (9) $i = 0$ и $i = m + 1$, получаем

$$P\vec{A}(x_0) + P\vec{B}(x_0) = \vec{u}(x_0), \tag{26}$$

$$P\vec{A}(x_{m+1}) + P\vec{B}(x_{m+1}) + P\vec{\Omega}(x_{m+1}) = \vec{u}(x_{m+1}). \tag{27}$$

Правые части уравнений (26), (27) известны. После умножения на P уравнения (26) и (27) преобразуются в n систем линейных уравнений:

$$A_\kappa\varphi_\kappa(x_0) + B_\kappa\psi_\kappa(x_0) = \hat{u}_\kappa(x_0), \tag{28}$$

$$A_\kappa\varphi_\kappa(x_{m+1}) + B_\kappa\psi_\kappa(x_{m+1}) = \hat{u}_\kappa(x_{m+1}) - \Omega_\kappa(x_{m+1})$$

$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Из (28), предполагая, что $\lambda' = 2\lambda$ не является собственным числом задачи (8), (8′), находим A_κ и B_κ:

$$A_\kappa = \frac{1}{\Delta_\kappa}[\psi_\kappa(x_{m+1})\hat{u}_\kappa(x_0) - \psi_\kappa(x_0)(\hat{u}_\kappa(x_{m+1}) - \Omega_\kappa(x_{m+1}))], \tag{29}$$

$$B_\kappa = \frac{1}{\Delta_\kappa}[-\varphi_\kappa(x_{m+1})\hat{u}_\kappa(x_0) + \varphi_\kappa(x_0)(\hat{u}_\kappa(x_{m+1}) - \Omega_\kappa(x_{m+1}))],$$

где $\Delta_\kappa = \varphi_\kappa(x_0)\psi_\kappa(x_{m+1}) - \varphi_\kappa(x_{m+1})\psi_\kappa(x_0) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n). \quad (30)$

Подставляя найденные значения A_κ, B_κ в (9), получаем решение конечноразностной задачи (8), (8′) во всех внутренних точках прямоугольника D, явно выраженное через заданные значения u в контурных точках по горизонтали и по вертикали.

Отметим, что полученное решение задачи (8), (8′) имеет особенно простой вид и связано с очень малым количеством вычислительных операций, если в уравнении (8) $f(x, y) \equiv 0$ и заданные значения u в контурных точках по горизонтали равны нулю[1]. В этом случае решение задачи (8), (8′) запишется в виде

$$\vec{u}(x_i) = P\vec{A}(x_i) + P\vec{B}(x_i), \qquad (9')$$

где постоянные A_κ, B_κ определяются равенствами

$$A_\kappa = \frac{1}{\Delta_\kappa}[\psi_\kappa(x_{m+1})\hat{u}_\kappa(x_0) - \psi_\kappa(x_0)\hat{u}_\kappa(x_{m+1})], \qquad (29')$$

$$B_\kappa = \frac{1}{\Delta_\kappa}[-\varphi_\kappa(x_{m+1})\hat{u}_\kappa(x_0) + \varphi_\kappa(x_0)\hat{u}_\kappa(x_{m+1})]$$

$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Чтобы найти собственные числа конечноразностной задачи (8), (8′) для прямоугольника D, достаточно найти такие значения $\lambda' = 2\lambda$, при которых система уравнений (28) имеет ненулевое решение при нулевых правых частях. Обращая внимание на таблицу 1, замечаем, что это может быть только в случае, когда $|\eta_\kappa| < 1$. При этом система уравнений (28) дает

$$A_\kappa = 0, \quad B_\kappa \sin(m+1)\arccos\eta_\kappa = 0, \qquad (28')$$

и, следовательно, собственные числа должны определяться из уравнений

$$T^2_{m+1}(a - \lambda_\kappa\gamma^2) - 1 = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n),$$

где $T_{m+1}(x)$ — полином Чебышева $T_{m+1}(x) = \cos(m+1)\arccos x$. Таким образом, для собственных чисел получаем формулу

$$\lambda' = -4\left(\frac{1}{h^2}\sin^2\frac{i\pi}{2(m+1)} + \frac{1}{h_1^2}\sin^2\frac{\kappa\pi}{2(n+1)}\right) \qquad (31)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ \kappa = 1, 2, \ldots n).$$

б) Пусть теперь область G составлена из двух прямоугольников D и D', например, так, как указано на рис. 2. Чтобы решить конечноразностную задачу (8), (8′) для такой области G, введем скалярные величины

$$\lambda'_\kappa = \cos\frac{\kappa\pi}{n'+1}, \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n'), \qquad (32)$$

[1] Очевидно, что к наложению двух задач подобного типа легко можно свести задачу (8), (8′) в общем случае.

n'-мерные векторы

$$\vec{u}'(x) = (u_1'(x),\ u_2'(x),\ \ldots,\ u_{n'}'(x)) = \\ = (u_{n_0+1}(x),\ u_{n_0+2}(x),\ \ldots,\ u_{n_0+n'}(x)), \tag{33}$$

$$\vec{f}'(x) = (f_1'(x),\ f_2'(x),\ \ldots,\ f_{n'}'(x)) = \\ = (f_{n_0+1}(x),\ f_{n_0+2}(x),\ \ldots,\ f_{n_0+n'}(x)), \tag{34}$$

$$\vec{\omega}'(x) = (u_{n_0}(x),\ 0,\ \ldots,\ 0,\ u_{n_0+n'+1}(x)) \tag{35}$$

и матрицу порядка n'

$$P' = \sqrt{\frac{2}{n'+1}}\left[\sin i\,\frac{\kappa\pi}{n'+1}\right]_1^{n'}. \tag{36}$$

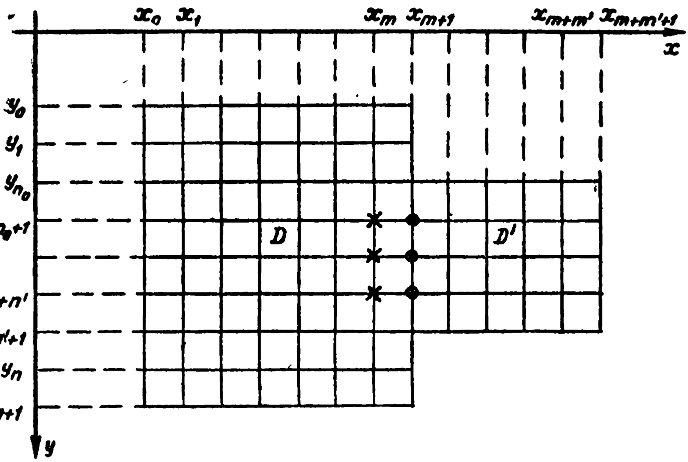

Рис. 2.

Введем еще n'-мерные векторы

$$\vec{A}'(x_{m+i}) = (A_1'\varphi_1'(x_{m+i}),\ A_2'\varphi_2'(x_{m+i}),\ \ldots,\ A_{n'}'\varphi_{n'}'(x_{m+i})), \tag{37}$$

$$\vec{B}'(x_{m+i}) = (B_1'\psi_1'(x_{m+i}),\ B_2'\psi_2'(x_{m+i}),\ \ldots,\ B_{n'}'\psi_{n'}'(x_{m+i}))$$

и диагональную матрицу порядка n'

$$G'(i) = [G_1'(i),\ G_2'(i),\ \ldots,\ G_{n'}'(i)], \tag{38}$$

где A_κ', B_κ' $(\kappa = 1, 2, \ldots, n')$ — произвольные вещественные постоянные, а функции $\varphi_\kappa'(x)$, $\psi_\kappa'(x)$, $G_\kappa'(x)$ определяются в зависимости от величин

$$\eta_\kappa' = a - \lambda_\kappa'\gamma^2 \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n') \tag{13'}$$

формулами, указанными в таблице 1'.

Таблица 1'.

	$\varphi'_\kappa(x_{m+i})$	$\psi'_\kappa(x_{m+i})$	$G'_\kappa(i)$	
$\eta'_\kappa \mid > 1$	μ'^{i}_κ	ν'^{i}_κ	$(\mu'^{i}_\kappa - \nu'^{i}_\kappa)(\mu'_\kappa - \nu'_\kappa)^{-1}$	$\mu^\kappa_\kappa = \eta'_\kappa + \sqrt{\eta'^2_\kappa - 1}$
$\mid\eta'_\kappa\mid = 1$	μ'^{i}_κ	$i\mu'^{i}_\kappa$	$i\mu'^{i-1}_\kappa$	$\nu'_\kappa = \eta'_\kappa - \sqrt{\eta'^2_\kappa - 1}$
$\mid\eta'_\kappa\mid < 1$	$\cos i\theta'_\kappa$	$\sin i\theta'^{i}_\kappa$	$\sin i\theta'_\kappa(\sin\theta'_\kappa)^{-1}$	$\theta'_\kappa = \arccos\eta'_\kappa$

Обозначим через $\overline{D}'$ «окаймленный» прямоугольник D', т. е. множество точек-узлов прямоугольника D' вместе с его законтурными точками по вертикали слева. На рис. 2 последние точки обозначены крестиками. Эти точки мы будем называть также точками подкладки. Точки, обозначенные на рис. 2 кружочками, будем называть внутренними точками стыка прямоугольников D и D'.

Теперь, пользуясь введенными обозначениями наряду с формулой (9) для прямоугольника D, мы можем написать соответствующую формулу такого же типа для D'. Эта формула имеет вид

$$\vec{u}'(x_{m+i}) = P'\vec{A}'(x_{m+i}) + P'\vec{B}'(x_{m+i}) + P'\Omega'(x_{m+i}) \tag{39}$$

$$(i = 0,\ 1,\ \dots,\ m' + 1),$$

где

$$\vec{\Omega}'(x_{m+i}) = \sum_{p=1}^{p=i-1} G'(i-p)\,P'\,[h^2\vec{f}'(x_{m+p}) - \gamma^2\vec{\omega}'(x_{m+p})], \tag{39'}$$

причем последняя сумма считается равной нулю при $i = 0;\ 1$.

Формулы (9) и (39) содержат только $2n + 2n'$ неопределенных параметров A_κ, B_κ $(\kappa = 1, 2, \dots, n)$ A_κ и B'_κ $(\kappa = 1, 2, \dots, n')$. Для нахождения этих параметров используем краевые условия в контурных точках по вертикали и так называемые «уравнения шва», которые получаются приравниванием правых частей формул (9) и (39) во внутренних точках стыка и точках подкладки.

Краевые условия в контурных точках по вертикали дают

$$P\vec{A}(x_0) + P\vec{B}(x_0) = \vec{u}(x_0), \tag{40}$$

$$P'\vec{A}'(x_{m+m'+1}) + P'\vec{B}'(_{m+m'+1}) =$$

$$= \vec{u}'(x_{m+m'+1}) - P'\vec{\Omega}'(x_{m+m'+1}), \tag{41}$$

$$[P\vec{A}(x_{m+1}) + P\vec{B}(x_{m+1})]_\kappa = u_\kappa(x_{m+1}) - \widehat{\Omega}\,\kappa\,(x_{m+1})$$

$$(\kappa = 1,\ 2,\ \dots,\ n_0,\quad n_0 + n' + 1;\quad n_0 + n' + 2,\ \dots,\ n). \tag{42}$$

Здесь $[\ ]_к$ означает $к$-ую компоненту вектора, стоящего в квадратных скобках.

Уравнения шва имеют вид:

$$([P\vec{A}(x_{m+1}) + PB(x_{m+1})]_j) - P'\vec{A}'(x_{m+1}) - P'B'(x_{m+1}) =$$

$$= -(\widehat{\Omega}_j(x_{m+1})) \tag{43}$$

$$(j = n_0 + 1,\ n_0 + 2,\ \ldots,\ n_0 + n'),$$

$$([P\vec{A}(x_m) + P\vec{B}(x_m)]_j) - P'\vec{A}'(x_m) - P\vec{B}'(x_m) = -(\widehat{\Omega}_j(x_m)) \tag{44}$$

$$(j = n_0 + 1,\ n_0 + 2,\ \ldots,\ n_0 + n').$$

Равенства (40), (41), (42), (43), (44) представляют собой систему $2n + 2n'$ линейных алгебраических уравнений с $2n + 2n'$ неизвестными $A_к$, $B_к$ ($к = 1, 2, \ldots, n$), $A'_к$, $B'_к$ ($к = 1, 2, \ldots, n'$). Решив эту систему и подставив найденные значения $A_к$, $B_к$, $A'_к$, $B'_к$ в формулы (9) и (39), получим искомое решение задачи (8), (8′) для области G, составленной из D и D'.

Отметим, что система уравнений (40), (41), (42), (43) и (44) легко упрощается, например, очень просто приводится к системе с $n + n'$ неизвестными $B_к$ ($к = 1, 2, \ldots, n$), $B'_к$ ($к = 1, 2, \ldots, n'$). Если известно, что $\lambda' = 2\lambda$ не является собственным числом не только для области G, но и для каждого из прямоугольников D и D' [1], то решение системы (40), (41), (42), (43), (44) можно свести к решению эквивалентной системы относительно неизвестных значений функции u в точках подкладки и во внутренних точках стыка. Число линейных алгебраических уравнений, подлежащих численному решению, будет равно числу внутренних точек стыка и точек подкладки.

Вопрос о нахождении собственных чисел задачи (8), (8′) для области G, составленной из D и D', эквивалентный задаче о нахождении корней алгебраического уравнения степени $mn + m'n'$, сводится в силу приведенных рассуждений к решению вопроса о том, когда система уравнений (40), (41), (42), (43), (44) может иметь ненулевые решения при нулевых правых частях.

Очевидно, что результаты, полученные здесь для области G, составленной из двух прямоугольников, точно таким же методом переносятся на случай, если область составлена из трех или нескольких прямоугольников.

в) Пусть теперь область G ограничена произвольным криволинейным контуром S. Чтобы решить конечноразностную задачу (8), (8′) в этом случае, впишем в область G прямоугольник D так, чтобы число q точек-узлов, лежащих внутри G, но не лежащих внутри D, было как можно меньше. Так, например, в случае области G, изображенной на рис. 3, таких точек будет 6.

[1] Последнее легко проверяется при помощи формулы для собственных чисел (31).

Принимая значения функции u в этих точках за неизвестные, можем при помощи шаблона (1) или соответствующего шаблона для конечноразностного оператора Лапласа в неравномерной сетке составить q уравнений для их определения. Для этого достаточно только, воспользовавшись формулой (9), записать уравнение (8) с учетом (8′) в каждой из q указанных точек. Решив построенную систему q уравнений и подставив в формулу (9) те значения u, которые соответствуют контурным точкам прямоугольника D по горизонтали и по вертикали, получим решение задачи (8), (8′) во всей области G. Аналогичным образом можно поступать, вписывая в область G не один прямоугольник, а некоторую область

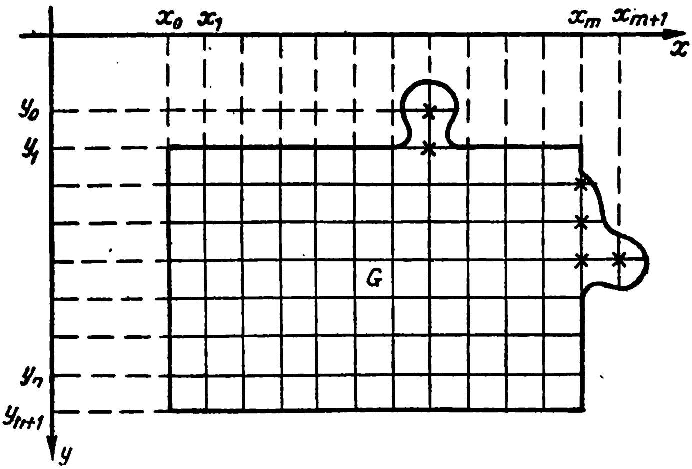

Рис. 3.

G', составленную из нескольких прямоугольников, так, чтобы число точек-узлов, лежащих внутри G', но не лежащих внутри G', было как можно меньше.

Для решения этой же задачи можно предложить другой способ — способ описанного прямоугольника. Поясним сущность этого способа на рассмотрении задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad u|_S = \beta(s) \tag{44′}$$

для области G, составленной из прямоугольников D и D' (см. рис. 2). Построим описанный прямоугольник T, определенный совокупностью точек x_i, y_κ $(i = 0, 1, \ldots, m + m' + 1, \kappa = 0, 1, \ldots, n + 1)$, и рассмотрим в этом прямоугольнике уравнение Пуассона

$$\Delta U = q, \tag{44″}$$

где q — функция, равная нулю во всех внутренних точках прямоугольника T, за исключением тех из них, которые являются граничными для области G, в которых значения функции q мы считаем неопределенными параметрами $q_1, q_2, \ldots, q_N$, где N — общее число точек указанного типа. Для уравнения (44″) решаем задачу

Дирихле, считая, что $U = u$ в точках сетки, являющихся граничными как для T, так и для G, а в точках сетки, граничных для T, но не являющихся граничными для G, полагаем для определенности $U = 0$. Очевидно, что функция U будет представляться в явном виде формулами (9), (29), (30). Определяем теперь параметры $q_1, q_2, \ldots, q_N$ из системы линейных алгебраических уравнений, полученных из условия, что U в точках, граничных для G, лежащих внутри T, совпадает с функцией u. При найденных таким образом параметрах $q_1, q_2, \ldots, q_N$ в области G, как легко видеть, будет выполняться равенство $U = u$, и, следовательно, формулы (9), (29), (30) при указанных значениях $q_1, q_2, \ldots, q_N$ дают решение задачи Дирихле для области G.

Отметим, что указанный здесь метод «суммарных представлений» приводит к резкому снижению числа линейных алгебраических уравнений не только в случае краевой задачи (8), (8′) для произвольной конечной области, но также и в случае краевых задач, связанных с уравнением (8) при всевозможных краевых условиях.

Например, пусть требуется для прямоугольника D_1 $(x_1 < x < x_m, y_0 < y < y_{n+1})$ решить смешанную краевую задачу

$$\Delta v - 2\lambda v = f(x, y), \tag{24}$$

$$v\Big|_{y=y_0} = \beta(s), \quad v\Big|_{y=y_{n+1}} = \beta(s), \tag{45}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{x=x_1} = \beta(s), \quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{x=x_m} = \beta(s), \tag{46}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе S прямоугольника D_1, $\beta(s)$ — заданная функция длины дуги s контура S. Заменяя уравнение (24) конечноразностным уравнением (8) и используя (45), можем записать для прямоугольника D (см. рис. 1) формулу (9), в которой в качестве неопределенных параметров будут только $2n$ постоянных A_κ, B_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, n)$. Заменяя краевые условия (46) конечными соотношениями

$$u_\kappa(x_0) - u_\kappa(x_2) = 2\beta(s)h,$$
$$u_\kappa(x_{m+1}) - u_\kappa(x_{m-1}) = 2\beta(s)h \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{46′}$$

и подставляя в них значения $u_\kappa(x_0)$, $u_\kappa(x_2)$, $u_\kappa(x_{m+1})$, $u_\kappa(x_{m-1})$, определенные из формулы (9), получим $2n$ уравнений для определения постоянных A_κ, B_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, n)$. Подставив найденные значения A_κ, B_κ в формулу (9), получим решение конечноразностной задачи, соответствующей краевой задаче (24), (45), (46), а тем самым и приближенное решение этой задачи.

В случае краевой задачи при тех или иных краевых условиях для области, составленной из нескольких прямоугольников или ограниченной криволинейным контуром, можно поступать аналогично тому, как это мы делали в случае задачи (8), (8′).

п. 2. Распространение метода на решение трехмерных краевых задач. Пусть h, h_1, h_2 — шаги сетки соответственно по x, y и z:

$$x_i = x_0 = ih, \quad y_\kappa = y_0 + \kappa h_1, \quad z_j = z_0 + jh_2$$
$$(i, \kappa, j = 0, \ \pm 1; \ \pm 2, \ \ldots),$$

$\gamma = \frac{h}{h_1}$, $\delta = \frac{h}{h_2}$ — отношения шагов сетки.

Конечноразностный трехмерный оператор Лапласа $\Delta_h u$, построенный по семи точкам, можно записать в виде

$$\Delta_h u = \frac{1}{h^2}\left\{\left|\begin{array}{c|c|c} & \gamma^2 & \\ \hline 1 & -2(1+\gamma^2+\delta^2) & 1 \\ \hline & \gamma^2 & \end{array}\right| u + \delta^2[u(x, y, z+h_2) + u(x, y, z-h_2)]\right\} \qquad (48)$$

При этом для всякой функции $v(x, y, z)$, имеющей непрерывные частные производные по x, y, z до четвертого порядка в точках сетки, имеет место равенство

$$\Delta_h v = \Delta v + 0\,(h^2 + h_1^2 + h_2^2), \qquad (49)$$

где Δv — трехмерный оператор Лапласа:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Поэтому решение краевых задач для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2\lambda v = f(x, y, z) \quad (\lambda^2 = \text{const} > 0), \qquad (50)$$

где $f(x, y, z)$ — заданная функция от x, y, z, можно заменять решением соответствующих конечноразностных краевых задач, связанных с уравнением

$$\Delta_h u - 2\lambda u = f(x, y, z), \qquad (51)$$

где $\Delta_h u$ — конечноразностный оператор, определенный равенством (48).

Пусть D — область, представляющая собой параллелепипед, определенный совокупностью точек (см. рис. 4)

$$(x_i, y_\kappa, z_j) \quad (i = 0, 1, \ldots, m+1; \quad \kappa = 0, 1, \ldots, n+1;$$
$$j = 0, 1, \ldots, l+1). \qquad (51')$$

Внутренними точками области D будут mnl точек

(x_i, y_κ, z_j) $(i = 1, 2, \ldots, m, \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, l)$, ее граничными точками по граням будем называть $2nl+2lm+$ $+2nm$ точек, принадлежащих границе S области D, но не лежащих на ребрах.

Установим для общего решения уравнения (51) в параллелепипеде D формулу, аналогичную формуле (9). Введем обозначения

$$u_{kj}(x_i)=u(x_i,\ y_k,\ z_j),\quad f_{kj}(x_i)=f(x_i,\ y_k,\ z_j),\tag{52}$$

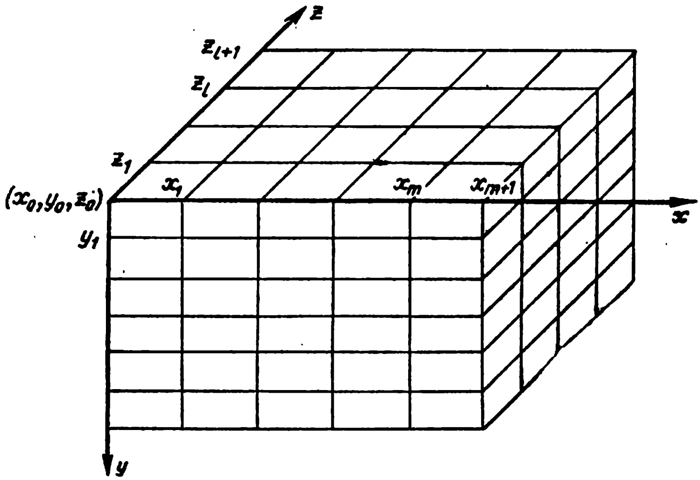

Рис. 4.

n-мерные векторы

$$\vec{u}_j(x_i)=(u_{1j}(x_i),\ u_{2j}(x_i),\ \ldots,\ u_{nj}(x_i))\quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ l+1),\tag{53}$$

$$\vec{f}_j(x_i)=(f_{1j}(x_i),\ f_{2j}(x_i),\ \ldots,\ f_{nj}(x_i))\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l),\tag{54}$$

$$\vec{\omega}_j(x_i)=(u_{0j}(x_i),\ 0,\ \ldots,\ 0,\ u_{n+1j}(x_i))\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l)\tag{55}$$

и прямоугольные $(n,\ l)$-матрицы, столбцами которых являются, соответственно, векторы (53) при $j=1,\ 2,\ \ldots,\ l$, векторы (54) и векторы (55):

$$U(x_i)=[\vec{u}_1(x_i),\ \vec{u}_2(x_i),\ \ldots,\ \vec{u}_l(x_i)],\tag{53'}$$

$$f(x_i)=[\vec{f}_1(x_i),\ \vec{f}_2(x_i),\ \ldots,\ \vec{f}_l(x_i)],\tag{54'}$$

$$\omega(x_i)=[\vec{\omega}_1(x_i),\ \vec{\omega}_2(x_i),\ \ldots,\ \vec{\omega}_l(x_i)].\tag{55'}$$

Будем предполагать, что значения u заданы на гранях параллелепипеда D, перпендикулярных оси y, и на его гранях, перпендикулярных оси z. Это означает, что матрица (55′) и векторы

$$\vec{u}_0(x_i),\ \vec{u}_{l+1}(x_i)\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)\tag{53''}$$

будут известны. В качестве неизвестных, подлежащих нахождению из уравнения (51), будут элементы матрицы $U(x_i)$, $(i = 0, 1, \ldots, m+1)$, определенной равенством (53′).

Вводя разностный оператор

$$Ru_{\kappa j}(x_i) = u_{\kappa j}(x_i + 2h) - 2bu_{\kappa j}(x_i + h) + u_{\kappa j}(x_i), \tag{56}$$

где $b = 1 + \lambda^2 + \delta^2 + \delta h^2$, уравнение (51) можно записать в виде nl уравнений

$$Ru_{\kappa j}(x_i) + \gamma^2 u_{\kappa-1 j}(x_i + h) + \gamma^2 u_{\kappa+1 j}(x_i + h) + \delta^2 u_{\kappa j-1}(x_i + h) + \\ + \delta^2 u_{\kappa j+1}(x_i + h) = h^2 f_{\kappa j}(x_i + h) \\ (\kappa = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, l) \tag{57}$$

или в виде l векторных равенств

$$R\vec{u}_j(x_i) + \gamma^2 T\vec{u}_j(x_i + h) + \delta^2\vec{u}_{j-1}(x_i + h) + \delta^2 u_{j+1}(x_i + h) = \\ = h^2\vec{f}_j(x_i + h) - \gamma^2\vec{\omega}_j(x_i + h) \quad (j = 1, 2, \ldots, l), \tag{58}$$

где T — матрица порядка n, определенная равенством (16). Пользуясь матрицами (7) и (19) и обозначением (20), уравнения (58) можем записать в виде

$$R\vec{\hat{u}}_j(x_i) + \gamma^2\Lambda\vec{\hat{u}}_j(x_i + h) + \delta^2\vec{\hat{u}}_{j-1}(x_i + h) + \delta^2\hat{u}_{j+1}(x_i + h) = \\ = h^2\vec{\hat{f}}_j(x_i + h) - \gamma^2\vec{\hat{\omega}}_j(x_i + h) \quad (j = 1, 2, \ldots, l). \tag{59}$$

Уравнения (59) эквивалентны nl скалярным уравнениям следующего вида:

$$R\hat{u}_{\kappa j}(x_i) + 2\gamma^2\lambda_\kappa\hat{u}_{\kappa j}(x_i + h) + \delta^2\hat{u}_{\kappa j-1}(x_i + h) + \delta^2\hat{u}_{\kappa j+1}(x_i + h) = \\ = h^2\hat{f}_{\kappa j}(x_i + h) - \gamma^2\hat{\omega}_{\kappa j}(x_i + h) \\ (\kappa = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, l), \tag{60}$$

или в развернутой форме

$$R\hat{u}_{\kappa 1}(x_i) + 2\gamma^2\lambda_\kappa\hat{u}_{\kappa 1}(x_i + h) + \delta^2\hat{u}_{\kappa 2}(x_i + h) = \\ = h^2\hat{f}_{\kappa 1}(x_1 + h) - \gamma^2\hat{\omega}_{\kappa 1}(x_i + h) - \delta^2\hat{u}_{\kappa 0}(x_i + h),$$

$$R\hat{u}_{\kappa 2}(x_i) + 2\gamma^2\lambda_\kappa\hat{u}_{\kappa 2}(x_i + h) + \delta^2\hat{u}_{\kappa 1}(x_i + h) + \delta^2\hat{u}_{\kappa 3}(x_i + h) = \\ = h^2\hat{f}_{\kappa 2}(x_i + h) - \gamma^2\hat{\omega}_{\kappa 2}(x_i + h),$$

. . . .

$$R\hat{u}_{\kappa l-1}(x_i) + 2\gamma^2\lambda_\kappa\hat{u}_{\kappa l-1}(x_i + h) + \delta^2\hat{u}_{\kappa l-2}(x_i + h) + \delta^2\hat{u}_{\kappa l}(x_i + h) = \\ = h^2\hat{f}_{\kappa l-1}(x_i + h) - \gamma^2\hat{\omega}_{\kappa l-1}(x_i + h), \tag{61}$$

$$\widehat{Ru}_{\kappa l}(x_l)+2\gamma^2\widehat{u}_{\kappa l}(x_i+h)+\delta^2 u_{\kappa l-1}(x_l+h)=$$
$$=h^2\widehat{f}_{\kappa l}(x_i+h)-\gamma^2\widehat{\omega}_{\kappa l}(x_l+h)-\delta^2\widehat{u}_{\kappa l+1}(x_l+h)$$
$$(\kappa=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Введем теперь вместо l неизвестных n-мерных векторов

$$\vec{\widehat{u}}_j(x_i)=P\vec{u}_j(x_i)=(\widehat{u}_{1j}(x_i),\ \widehat{u}_{2j}(x_i),\ \ldots,\ \widehat{u}_{nj}(x_i)) \quad (62)$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ l)$$

n новых l-мерных векторов

$$\vec{v}_\kappa(x_i)=(\widehat{u}_{\kappa 1}(x_i),\ \widehat{u}_{\kappa 2}(x_i),\ \ldots,\ \widehat{u}_{\kappa l}(x_i)) \quad (\kappa=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (63)$$

Очевидно, что $(n,\ l)$-матрица

$$\widehat{U}(x_i)=[\vec{\widehat{u}}_1(x_i),\ \vec{\widehat{u}}_2(x_i),\ \ldots,\ \vec{\widehat{u}}_l(x_l)] \quad (62')$$

и $(l,\ n)$-матрица

$$V(x_i)=[\vec{v}_1(x_i),\ \vec{v}_2(x_l),\ \ldots,\ \vec{v}_n(x_l)] \quad (63')$$

являются транспонированными по отношению друг к другу, и, следовательно, если мы найдем матрицу $V(x_l)$, то тем самым найдем и матрицу $\widehat{U}(x_i)$.

Введем еще l-мерные векторы, значения которых при высказанных предположениях можно считать известными:

$$\vec{F}_\kappa(x_i)=(\widehat{f}_{\kappa 1}(x_i),\ \widehat{f}_{\kappa 2}(x_i),\ \ldots,\ \widehat{f}_{\kappa l}(x_l)) \quad (\kappa=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (64)$$
$$\vec{w}_\kappa(x_l)=(\widehat{\omega}_{\kappa 1}(x_i),\ \widehat{\omega}_{\kappa 2}(x_i),\ \ldots,\ \widehat{\omega}_{\kappa l}(x_i)) \quad (\kappa=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (64')$$
$$\vec{g}_\kappa(x_i)=(\widehat{u}_{\kappa 0}(x_l),\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \widehat{u}_{\kappa l+1}(x_l)) \quad (\kappa=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (64'')$$

После этого система уравнений (61) запишется в виде n векторных равенств

$$R\vec{v}_\kappa(x_l)+2\gamma^2\lambda_\kappa\vec{v}_\kappa(x_l+h)+\delta^2 T'\vec{v}_\kappa(x_i+h)=$$
$$=h^2\vec{F}_\kappa(x_l+h-\gamma^2\vec{w}_\kappa(x_l+h)-\delta^2\vec{g}_\kappa(x_i+h)$$
$$(\kappa=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (65)$$

где T' — матрица порядка l:

$$T'=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=P'\Lambda'P', \quad (65')$$

$$P' = \sqrt{\frac{2}{l+1}}\left[\sin i\frac{\kappa\pi}{l+1}\right]_1^l, \qquad (65'')$$

$$\Lambda' = 2[\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_l'], \quad \lambda_\kappa' = \cos\frac{\kappa\pi}{l+1} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, l). \qquad (65''')$$

Полагая теперь

$$P'\vec{\hat{v}}_\kappa = \vec{\hat{v}}_\kappa, \quad P'\vec{F}_\kappa = \vec{\hat{F}}_\kappa, \quad P'\vec{w}_\kappa = \vec{\hat{w}}_\kappa, \quad P'\vec{g}_\kappa = \vec{\hat{g}}_\kappa, \qquad (66)$$

уравнение (65) запишем в виде

$$R\vec{\hat{v}}_\kappa(x_i) + 2\gamma^2\lambda_\kappa\vec{\hat{v}}_\kappa(x_i+h) + \delta^2\Lambda'\vec{\hat{v}}_\kappa(x_i+h) =$$

$$= h^2\vec{\hat{F}}_\kappa(x_i+h) - \gamma^2\vec{\hat{w}}_\kappa(x_i+h) - \delta^2\vec{\hat{g}}_\kappa(x_i+h)$$

$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n). \qquad (67)$$

Каждое из векторных уравнений (67) запишется в виде l скалярных уравнений

$$R\hat{v}_{\kappa j}(x_i) + 2(\gamma^2\lambda_\kappa + \delta^2\lambda_j')\hat{v}_{\kappa j}(x_i+h) =$$

$$= h^2\hat{F}_{\kappa j}(x_i+h) - \gamma^2\hat{w}_{\kappa j}(x_i+h) - \delta^2\hat{g}_{\kappa j}(x_i+h)$$

или

$$(j = 1, 2, \ldots, l) \qquad (68)$$

$$\hat{v}_{\kappa j}(x_i+2h) - 2\eta_{\kappa j}\hat{v}_{\kappa j}(x_i+h) + \hat{v}_{\kappa j}(x_i) =$$

$$= h^2\hat{F}_{\kappa j}(x_i+h) - \gamma^2\hat{w}_{\kappa j}(x_i+h) - \delta^2\hat{g}_{\kappa j}(x_i+h)$$

где

$$(j = 1, 2, \ldots, l), \qquad (69)$$

$$\eta_{\kappa j} = b - (\gamma^2\lambda_\kappa + \delta^2\lambda_j') = 1 + \gamma^2 + \delta^2 + \lambda h^2 - (\gamma^2\lambda_\kappa + \delta^2\lambda_j'). \qquad (69')$$

Введем l-мерные векторы

$$\vec{A}_\kappa'(x_i) = (A_{\kappa 1}\varphi_{\kappa 1}(x_i), A_{\kappa 2}\varphi_{\kappa 2}(x_i), \ldots, A_{\kappa l}\varphi_{\kappa l}(x_i)),$$

$$\vec{B}_\kappa'(x_i) = (B_{\kappa 1}\psi_{\kappa 1}(x_i), B_{\kappa 2}\psi_{\kappa 2}(x_i), \ldots, B_{\kappa l}\psi_{\kappa l}(x_i)) \qquad (70)$$

и диагональную матрицу порядка l

$$G_\kappa'(i) = [G_{\kappa 1}(i), G_{\kappa 2}(i), \ldots, G_{\kappa l}(i)], \qquad (70')$$

где $A_{\kappa j}$, $B_{\kappa j}$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ — произвольные вещественные постоянные, а функции $\varphi_{\kappa j}(x_i)$, $\psi_{\kappa j}(x_i)$, $G_{\kappa j}(i)$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ в зависимости от величин $\eta_{\kappa j}$ определяются формулами, указанными в таблице 2.

Таблица 2

	$\varphi_{\kappa j}(x_i)$	$\psi_{\kappa j}(x_i)$	$G_{\kappa j}(i)$	
$\vert\eta_{\kappa j}\vert > 1$	$\mu^i_{\kappa j}$	$\nu^i_{\kappa j}$	$(\mu^i_{\kappa j} - \nu^i_{\kappa j})(\mu_{\kappa j} - \nu_{\kappa j})^{-1}$	$\mu_{\kappa j} = \eta_{\kappa j} + \sqrt{\eta^2_{\kappa j} - 1}$
$\vert\eta_{\kappa j}\vert = 1$	$\mu^i_{\kappa j}$	$i\mu^i_{\kappa j}$	$i\mu^{i-1}_{\kappa j}$	$\nu_{\kappa j} = \eta_{\kappa j} - \sqrt{\eta^2_{\kappa j} - 1}$
$\vert\eta_{\kappa j}\vert < 1$	$\cos i\theta_{\kappa j}$	$\sin i\theta_{\kappa j}$	$\sin i\theta_{\kappa j}(\sin\theta_{\kappa j})^{-1}$	$\theta_{\kappa j} = \arccos\eta_{\kappa j}$

Общее решение системы уравнений (69), или, что все равно, каждого из векторных уравнений (67), по аналогии с (23), запишется в виде

$$\hat{\vec{v}}_\kappa(x_i) = \vec{A}'_\kappa(x_i) + \vec{B}'_\kappa(x_i) + \vec{\Omega}'_\kappa(x_i), \qquad (71)$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m+1),$$

где

$$\vec{\Omega}'_\kappa(x_0) = \vec{\Omega}'_\kappa(x_1) = 0,$$

$$\vec{\Omega}'_\kappa(x_i) = \sum_{p=1}^{p=i-1} G'_\kappa(i-p)\,P'\,[h^2\vec{F}_\kappa(x_p) - \gamma^2\vec{w}_\kappa(x_p) - \delta^2\vec{g}_\kappa(x_p)]. \qquad (71')$$

Таким образом, общее решение n векторных уравнений (65) в параллелепипеде D и в его граничных точках по граням, перпендикулярным оси x, получаем в виде n равенств для l-мерных векторов

$$\vec{v}_\kappa(x_i) = P'\vec{A}'_\kappa(x_i) + P'\vec{B}'(x_i) + P'\vec{\Omega}'_\kappa(x_i) \qquad (72)$$

$$(\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

или в матричной форме

$$V(x_i) = P'(A'(x_i) + B'(x_i) + \Omega'(x_i)), \qquad (72')$$

где $A'(x_i)$, $B'(x_i)$, $\Omega'(x_i)$ — прямоугольные $(l,\ n)$-матрицы:

$$A'(x_i) = [\vec{A}'_1(x_i),\ \vec{A}'_2(x_i),\ \ldots,\ \vec{A}'_n(x_i)], \qquad (73)$$

$$B'(x_i) = [\vec{B}'_1(x_i),\ \vec{B}'_2(x_i),\ \ldots,\ \vec{B}'_n(x_i)], \qquad (74)$$

$$\Omega'(x_i) = [\vec{\Omega}'_1(x_i),\ \vec{\Omega}'_2(x_i),\ \ldots,\ \vec{\Omega}'_n(x_i)]. \qquad (75)$$

Транспонируя обе части равенства (72'), получаем равенства для $(n,\ l)$-матриц:

$$\hat{U}(x_i) = [A(x_i) + B(x_i) + \Omega(x_i)]\,P', \qquad (76)$$

где $A(x_i)$, $B(x_i)$, $\Omega(x_i)$ — $(n,\ l)$-матрицы, транспонированные с $A'(x_i)$, $B'(x_i)$, $\Omega'(x_i)$:

$$A(x_i) = \begin{bmatrix} A_{11}\varphi_{11}(x_i) & A_{12}\varphi_{12}(x_i) & \dots & A_{1l}\varphi_{1l}(x_i) \\ A_{21}\varphi_{21}(x_i) & A_{22}\varphi_{22}(x_i) & \dots & A_{2l}\varphi_{2l}(x_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}\varphi_{n1}(x_i) & A_{n2}\varphi_{n2}(x_i) & \dots & A_{nl}\varphi_{nl}(x_i) \end{bmatrix} \qquad (77)$$

$$B(x_i) = \begin{bmatrix} B_{11}\psi_{11}(x_i) & B_{12}\psi_{12}(x_i) & \dots & B_{1l}\psi_{1l}(x_i) \\ B_{21}\psi_{21}(x_i) & B_{22}\psi_{22}(x_i) & \dots & B_{2l}\psi_{2l}(x_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1}\psi_{n1}(x_i) & B_{n2}\psi_{n2}(x_i) & \dots & B_{nl}\psi_{nl}(x_i) \end{bmatrix} \qquad (78)$$

$$\Omega(x_i) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{p=1}^{p=i-1} G_{11}(i-p)\widehat{\Phi}_{11}(x_p) & \sum\limits_{p=1}^{p=i-1} G_{12}(i-p)\widehat{\Phi}_{12}(x_p) & \dots & \sum\limits_{p=1}^{p=i-1} G_{1l}(i-p)\widehat{\Phi}_{1l}(x_p) \\ \sum\limits_{p=1}^{p=i-1} G_{21}(i-p)\widehat{\Phi}_{21}(x_p) & \sum\limits_{p=1}^{p=i-1} G_{22}(i-p)\widehat{\Phi}_{22}(x_p) & \dots & \sum\limits_{p=1}^{p=i-1} G_{2l}(i-p)\widehat{\Phi}_{2l}(x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{p=1}^{p=i-1} G_{n1}(i-p)\widehat{\Phi}_{n1}(x_p) & \sum\limits_{p=1}^{p=i-1} G_{n2}(i-p)\widehat{\Phi}_{n2}(x_p) & \dots & \sum\limits_{p=1}^{p=i-1} G_{nl}(i-p)\widehat{\Phi}_{nl}(x_p) \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$\Omega(x_0) = \Omega(x_1) = 0, \qquad (79')$$

где

$$\vec{\widehat{\Phi}}_\kappa(x_i) = (\widehat{\Phi}_{\kappa 1}(x_i),\ \widehat{\Phi}_{\kappa 2}(x_i),\ \dots,\ \widehat{\Phi}_{\kappa l}(x_i)) =$$

$$= P'[h^2\vec{F}_\kappa(x_i) - \gamma^2\vec{w}_\kappa(x_i) - \delta^2\vec{g}_\kappa(x_i)] \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \dots,\ n), \qquad (80)$$

l-мерные векторы $\vec{F}_\kappa(x_i)$, $\vec{w}_\kappa(x_i)$, $\vec{g}_\kappa(x_i)$ $(\kappa = 1, 2, \dots, n)$ определены равенствами (64),(64'), (64").

Умножая слева на P обе части равенства (76), получаем искомое выражение (n, l)-матрицы (53'):

$$U(x_i) = P[A(x_i) + B(x_i) + \Omega(x_i)]P' \quad (i = 0,\ 1,\ \dots,\ m+1). \qquad (81)$$

Формула (81) дает явное выражение решения трехмерного конечноразностного уравнения (51) в параллелепипеде D и в его граничных точках по граням, перпендикулярным оси x, через $2nl$ произвольных вещественных постоянных $A_{\kappa j}$, $B_{\kappa j}$ $(\kappa = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, l)$ и через значения функции u в граничных точках по граням, перпендикулярным оси y, и по граням, перпендикулярным оси z.

Особенно простой вид принимает формула (81) в случае задачи Дирихле при нулевой правой части уравнения (51) и при нулевых краевых условиях на гранях, перпендикулярных оси y, и на гранях, перпендикулярных оси z[1]. В этом случае $\Omega(x_i) \equiv 0$ и формула (81) принимает вид

$$U(x_i) = P[A(x_i) + B(x_i)]P'. \qquad (81')$$

[1] Очевидно, что общий случай задачи Дирихле для уравнения (51) для параллелепипеда D легко сводится к наложению трех задач подобного типа.

Формула (81) по отношению к трехмерному конечноразностному уравнению (51) играет такую же роль, как формула (9) по отношению к уравнению (8). По аналогии с двумерным случаем она может быть использована для значительного снижения количества линейных алгебраических уравнений, связанных с решением трехмерных краевых задач для дифференциального уравнения (50) или для конечноразностного уравнения (51) как в случае области, составленной из нескольких параллелепипедов, так и в случае области произвольно заданной структуры.

Найдем, например, собственные числа $\lambda' = 2\lambda$ трехмерного конечноразностного оператора Лапласа Δhu, определенного равенством (48), при краевых условиях задачи Дирихле для параллелепипеда D (эта задача эквивалентна решению алгебраического уравнения относительно λ' степени mnl).

Полагая в (81′) $U(x_0) = 0$, $U(x_{m+1}) = 0$, получаем

$$\sin(m+1)\Theta_{\kappa j} = 0, \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, e).$$

Отсюда так же, как и в двумерном случае, находим

$$\lambda' = \frac{2}{h^2}\left[\cos\frac{i\pi}{m+1} - 1 - \gamma^2 - \delta^2 + \gamma^2\lambda_\kappa + \delta^2\lambda_j'\right]$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad \kappa = 1, 2, \ldots); \quad j = 1, 2, \ldots, l),$$

или

$$\lambda' = -4\left(\frac{1}{h^2}\sin^2\frac{i\pi}{2(m+1)} + \frac{1}{h_1^2}\sin^2\frac{\kappa\pi}{2(n+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h_2^2}\sin^2\frac{j\pi}{2(l+1)}\right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, l). \qquad (82)$$

Отметим, что полученные здесь результаты, относящиеся к трехмерному дифференциальному уравнению (50), можно непосредственно применить ко всякому трехмерному эллиптическому дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Для этого в дифференциальном уравнении

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2a_1\frac{\partial v_0}{\partial x} + 2a_2\frac{\partial v_0}{\partial y} + 2a_3\frac{\partial v_0}{\partial z} +$$

$$+ b_1 v_0 = f_0(x, y, z), \qquad (83)$$

где a_1, a_2, a_3, b_1 — постоянные, $f_0(x, y, z)$ — заданная функция своих аргументов, достаточно вместо функции v_0 ввести новую неизвестную функцию

$$v = v_0 e^{\mu}, \quad \mu = a_1 x + a_2 y + a_3 z, \qquad (83')$$

после чего уравнение (83) переходит в уравнение вида (50):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (b_1 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)\, v =$$

$$= f_0(x,\ y,\ z)\, e^{\mu}. \qquad (83'')$$

п. 3. Численный пример. Для иллюстрации нашего метода ограничимся рассмотрением одного численного примера.

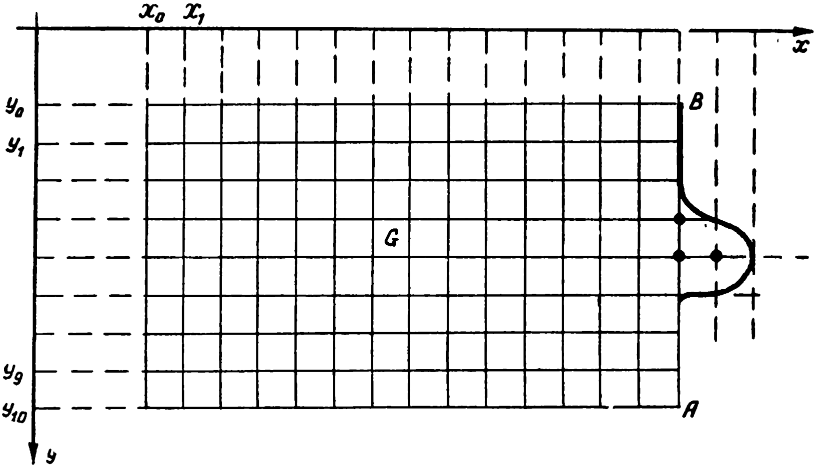

Рис. 5.

Пусть для области G, близкой к прямоугольнику (см. рис. 5), требуется решить задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \qquad (84)$$

$$v\Big|_{y=y_0} = 0, \quad v\Big|_{y=y_{n+1}} = 0, \qquad (84')$$

$$v\Big|_{x=x_0} = 0, \quad v\Big|_{AB} = 1. \qquad (84'')$$

При этом допустим, что шаги сетки h и h_1 требуется брать настолько малыми, что при заданном $\gamma = \frac{h}{h_1} = 1$ внутри области G насчитывается очень много внутренних узлов, например 18 000 003, как указано на рис. 5.

Принимая $m = 2\,000\,000$, $n = 9$, конечноразностную краевую задачу (8), (8'), соответствующую задаче Дирихле (84), (84'), (84''), можем записать в виде

$$\Delta_h u = 0, \qquad (85)$$

$$u\Big|_{y=y_0} = 0, \quad u\Big|_{y=y_{10}} = 0, \qquad (85')$$

$$u\Big|_{y=x_0} = 0, \quad u\Big|_{AB} = 1. \qquad (85'')$$

В силу краевых условий (85′) имеем $\vec{\omega}(x) \equiv 0$ и, так как $f(x,y)=0$, то $\vec{\Omega}(x_i) = 0$, где $\vec{\omega}(x)$ и $\vec{\Omega}(x_i)$ — векторы, определенные равенствами (5) и (11) при $n = 9$. Поэтому для решения конечноразностной задачи (85), (85′), (85″) можем воспользоваться формулой суммарных представлений (9) в упрощенном виде (9′):

$$\vec{u}(x_i) = P\vec{A}(x_i) + P\vec{B}(x_i) \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2\,000\,001), \tag{86}$$

где $\vec{u}(x_i)$ — вектор (4) при $n = 9$, $\vec{A}(x_i)$, $\vec{B}(x_i)$ — векторы (10) при $n = 9$, P — матрица (7) при $n = 9$.

Запишем теперь матрицу P и векторы $\vec{A}(x_i)$, $\vec{B}(x_i)$, в соответствии с таблицей 1, в развернутой форме.

Учитывая (13) и то, что $\lambda = 0$, имеем

$$\eta_\kappa = 2 - \cos\frac{\kappa\pi}{10}, \quad \mu_\kappa = \eta_\kappa + \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1}, \quad \nu_\kappa = \eta_\kappa - \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1} \tag{87}$$

$$(\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ 9),$$

$$\vec{A}(x_i) = (A_1\mu_1^i,\ A_2\mu_2^i,\ \ldots,\ A_9\mu_9^i) = \Phi(i)\vec{A}, \tag{88}$$

$$\vec{B}(x_i) = (B_1\nu_1^i,\ B_2\nu_2^i,\ \ldots,\ B_9\nu_9^i) = \Psi(i)\vec{B},$$

где $\vec{A}$, $\vec{B}$ — n-метровые векторы, $\Phi(i)$ и $\Psi(i)$ — диагональные матрицы при $n=9$:

$$\vec{A} = (A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_9), \quad \vec{B} = (B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_9), \tag{88′}$$

$$\Phi(i) = [\mu_1^i,\ \mu_2^i,\ \ldots,\ \mu_9^i], \quad \Psi(i) = [\nu_1^i,\ \nu_2^i,\ \ldots,\ \nu_9^i]. \tag{88″}$$

Записав формулу (86) в виде

$$u(x_i) = P\,\Phi(i)\vec{A} + P\,\Psi(i)\vec{B} \tag{86′}$$

и подставляя сюда краевые условия (85″), получаем

$$0 = P\Phi(0)\vec{A} + P\Psi(0)\vec{B},$$

$$\vec{u}(x_{m+1}) = P\Phi(m+1)\vec{A} = P\Psi(m+1)\vec{B}.$$

Отсюда находим

$$\vec{A} = -\vec{B} = [\Phi(m+1) - \Psi(m+1)]^{-1} P\vec{u}(x_{m+1}), \tag{90}$$

где $\vec{u}(x_{m+1})$ — n-мерный вектор (при $n = 9$):

$$\vec{u}(x_{m+1}) = (1,\ 1,\ u_3(x_{m+1}),\ u_4(x_{m+1}),\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1). \tag{90′}$$

Подставляя (90) в (86′), получаем

$$\vec{u}(x_i) = P[\Phi(i) - \Psi(i)][\Phi(m+1) - \Psi(m+1)]^{-1}P\vec{u}(x_{m+1}), \tag{91}$$

$$P = \sqrt{\frac{2}{10}}\left|\sin i\frac{\kappa\pi}{10}\right|_1^9 =$$

$$= 0{,}1\cdot\sqrt{0{,}2}\left|\begin{array}{ccccccccc}
3{,}0902 & 5{,}8778 & 8{,}0902 & 9{,}5106 & 10 & 9{,}5106 & 8{,}0902 & 5{,}8778 & 3{,}0902 \\
5{,}8778 & 9{,}5106 & 9{,}5106 & 5{,}8778 & 0 & -5{,}8778 & -9{,}5106 & -9{,}5106 & -5{,}8778 \\
8{,}0902 & 9{,}5106 & 3{,}0902 & -5{,}8778 & -10 & -5{,}8778 & 3{,}0902 & 9{,}5106 & 8{,}0902 \\
9{,}5106 & 5{,}8778 & -5{,}8778 & -9{,}5106 & 0 & 9{,}5106 & 5{,}8778 & -5{,}8778 & -9{,}5106 \\
10 & 0 & -10 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0 & 10 \\
9{,}5106 & -5{,}8778 & -5{,}8778 & 9{,}5106 & 0 & -9{,}5106 & 5{,}8778 & 5{,}8778 & -9{,}5106 \\
8{,}0902 & -9{,}5106 & 3{,}0902 & 5{,}8778 & -10 & 5{,}8778 & 3{,}0902 & -9{,}5106 & 8{,}0902 \\
5{,}8778 & -9{,}5106 & 9{,}5106 & -5{,}8778 & 0 & 5{,}8778 & -9{,}5106 & 9{,}5106 & -5{,}8778 \\
3{,}0902 & -5{,}8778 & 8{,}0902 & -9{,}5106 & 10 & -9{,}5106 & 8{,}0902 & -5{,}8778 & 3{,}0902
\end{array}\right| \tag{89}$$

Формула (91) давала бы решение задачи (85), (85′), (85″) в явном виде, если бы были известны значения $u_3(x_{m+1})$, $u_4(x_{m+1})$, $u_4(x_{m+2})$ (см. рис. 5). Для определения этих неизвестных запишем уравнение (85) для точек (x_{m+1}, y_3), (x_{m+1}, y_4), (x_{m+2}, y_4). Эти уравнения с учетом краевых условий (85″), если для определенности ограничиться случаем равномерной сетки, запишутся в виде[1]

$$\begin{gathered}
u_3(x_m) - 4u_3(x_{m+1}) + 1 + 1 + u_4(x_{m+1}) = 0, \\
u_4(x_m) - 4u_4(x_{m+1}) + u_4(x_{m+2}) + 1 + u_3(x_{m+1}) = 0, \\
u_4(x_{m+1}) - 4u_4(x_{m+2}) + 1 + 1 + 1 = 0.
\end{gathered} \tag{92}$$

В системе уравнений (92), кроме трех неизвестных параметров $u_3(x_{m+1})$, $u_4(x_{m+1})$, $u_4(x_{m+2})$, участвуют еще дополнительные параметры $u_3(x_m)$ и $u_4(x_m)$. Но эти два параметра легко выражаются через $u_3(x_{m+1})$ и $u_4(x_{m+1})$, так как, согласно (91),

$$\vec{u}(x_m) = P[\Phi(m) - \Psi(m)][\Phi(m+1) - \Psi(m+1)]^{-1}P\vec{u}(x_{m+1}), \tag{92′}$$

---

[1] В случае неравномерной сетки конечноразностный оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta'_h u = \frac{2}{h'_1 + h'_3}\left[\frac{u(x+h'_1+y) - u(x,y)}{h'_1} + \frac{u(x-h'_3, y) - u(x,y)}{h'_3}\right] + \frac{2}{h'_2 + h'_4}\left[\frac{u(x, y+h'_2) - u(x,y)}{h'_2} + \frac{u(x, y-h'_4) - u(x,y)}{h'_4}\right].$$

где h'_1, h'_2, h'_3, h'_4 — расстояния от узла (x,y) до соответствующих четырех ближайших узлов сетки. Причем оператор $\Delta'_h u$ аппроксимирует дифференциальный оператор Δu с точностью до величины $0(h')$, где $h' = \max(h'_1, h'_2, h'_3, h'_4)$. Погрешность метода конечных разностей в этом случае, в отличие от случая равномерной сетки, будет величиной порядка не $0(h^2)$, а $0(h')$. Вид области, для которой решается краевая задача для дифференциального уравнения Лапласа или Пуассона, на указанную оценку погрешности метода не влияет, если предположить, что решение задачи существует и имеет непрерывные производные до четвертого порядка, ограниченные в рассматриваемой области (см., например, [73]).

Имеем

$$[\Phi(m) - \Psi(m)][\Phi(m+1) - \Psi(m+1)]^{-1} = \nu + 0(\delta), \tag{93}$$

где ν — диагональная матрица

$$\nu = [0{,}73227;\ 0{,}54412;\ 0{,}41504;\ 0{,}32738;\ 0{,}26795;\ 0{,}22778;\ 0{,}20102;\ 0{,}18403;\ 0{,}17460], \tag{93'}$$

$0(\delta)$ — диагональная матрица

$$0(\delta) = [0(\mu_1^{-2m}),\ 0(\mu_2^{-2m}),\ \ldots,\ 0(\mu_9^{-2m})], \tag{93''}$$

члены которой в силу неравенств $\mu_\kappa > \eta_\kappa = 2 - \frac{\cos \kappa\pi}{10} > 1{,}048943$ равны нулю с точностью до пятого знака после запятой.

Поэтому, производя вычисления с пятью знаками после запятой, равенство (92′) можем записать в виде

$$\vec{u}(x_m) = P\nu P\vec{u}(x_{m+1}). \tag{92''}$$

Подставляя в (92″) численные выражения (89), (93′) и (90′), после простых подсчетов находим

$$u_3(x_m) = 0{,}37104 + 0{,}35415u_3(x_{m+1}) + 0{,}12944u_4(x_{m+1}),$$
$$u_4(x_m) = 0{,}32360 + 0{,}18317u_3(x_{m+1}) + 0{,}29419u_4(x_{m+1}).$$

Подставляя это в уравнения (92) и решая полученную таким образом систему трех линейных алгебраических уравнений, находим

$$u_4(x_{m+2}) = 0{,}98008, \tag{94}$$
$$u_3(x_{m+1}) = 0{,}93544, \quad u_4(x_{m+1}) = 0{,}92030. \tag{95}$$

Равенство (94) и равенство (91), в котором

$$\vec{u}(x_{m+1}) = (1;\ 1;\ 0{,}93544;\ 0{,}92030;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1), \tag{91'}$$

дают численное выражение решения конечноразностной задачи (85), (85′), (85″) во всех 18 000 003 внутренних узлах области G.

Чтобы получить численные значения $u_1(x_i)$, $u_2(x_i)$, ..., $u_9(x_i)$ при любом интересующем нас значении i $(1 \leqslant i \leqslant 2 \cdot 10^6)$, достаточно вычисленный уже вектор $P\vec{u}(x_{m+1})$ умножить на диагональную матрицу девятого порядка $[\Phi(i) - \Psi(i)]\,[\Phi(m+1) - \Psi(m+1)]^{-1}$ и полученный результат умножить на матрицу P, определенную равенством (89). Таким образом, численное решение данной конкретной задачи с количеством внутренних узлов, равным 18 000 003, получено.

Рассмотренный числовой пример убедительно показывает, что получаемая нами запись ответа при численном решении задач в виде простых численных выражений имеет определенные преимущества по сравнению со всеми известными конечноразностными методами решения краевых задач для уравнения в частных производных, в которых ответ записывается в виде числовых таблиц.

п. 4. Обобщение основной формулы суммарных представлений для двумерных краевых задач. Оказывается, что в случае, когда на горизонтальных сторонах прямоугольника задаются краевые условия не задачи Дирихле, а задачи Неймана или третьей краевой задачи, можно построить формулы суммарных представлений, аналогичные основной формуле (9).

1°. Пусть для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-2\lambda v=f(x,\ y) \tag{24}$$

требуется решить краевую задачу для прямоугольника D_1

$$(x_i,\ y_\kappa)\quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ m+1,\quad \kappa=0,\ 1,\ \ldots,\ n) \tag{96}$$

(см. рис. 1), когда на горизонтальных сторонах этого прямоугольника заданы величины

$$v\Big|_{y=y_0}=\beta(x),\quad \left(\frac{\partial v}{\partial n}+\kappa_1,\ v\right)_{y=y_n}=\beta_1(x), \tag{25'}$$

где $\beta(x)$, $\beta_1(x)$— функции от x, $\vec{n}$—внешняя нормаль к границе прямоугольника D_1, κ_1—постоянная, которую для определенности будем считать неотрицательной.

Учитывая, что

$$\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{y=y_n}=\frac{v(x,y_{n+1})-v(x,y_n)}{h_1}+0(h_1), \tag{97}$$

задачу (24), (25') можем заменить конечноразностной задачей

$$\Delta_h u-2\lambda u=f(x,\ y), \tag{8}$$

$$u_0(x_i)=\beta(x_i),\ u_{n+1}(x_i)-\operatorname{tg}\beta\, u_n(x_i)=h_1\beta_1(x_i) \tag{8''}$$

$$(\operatorname{tg}\beta=1-\kappa_1 h_1,\ |\operatorname{tg}\beta|\leqslant 1,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

В гл. 1, § 3 было показано, что для матрицы порядка n

$$T_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & \operatorname{tg}\beta \end{vmatrix},\ |\operatorname{tg}\beta|\leqslant 1 \tag{98}$$

диагональная матрица собственных чисел определяется равенством

$$\Lambda_1 = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n], \tag{98'}$$

где

$$\lambda_j = 2\cos\alpha_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{98''}$$

α_j — корни уравнения

$$\frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin n\Theta} = \operatorname{tg}\beta, \tag{98'''}$$

заключенные в интервале $0 < \Theta < \pi$. В частности, при $\operatorname{tg}\beta = 1$, что соответствует краевому условию задачи Неймана, $\alpha_j = \frac{2j-1}{2n+1}\pi$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Фундаментальная матрица P_1, соответствующая матрице T_1, имеет вид

$$P_1 = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n], \tag{99}$$

где

$$\vec{p}_j = C_j(\sin\alpha_j, \sin 2\alpha_j, \ldots, \sin n\alpha_j), \tag{99'}$$

$$C_j = \left(\sum_{i=1}^{n}\sin^2 i\alpha_j\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Пользуясь матрицами T_1 и P_1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Для общего решения уравнения

$$\Delta_h u - 2\lambda u = f(x, y) \tag{8}$$

в прямоугольнике D (без учета его контурных угловых точек (см. рис. 1) имеет место равенство

$$\vec{u}(x_i) = P_1\vec{A}_1(x_i) + P_1\vec{B}_1(x_i) + P_2\vec{\Omega}_1(x_i), \tag{100}$$

где $\vec{A}_1(x_i)$, $\vec{B}_1(x_i)$, $\vec{\Omega}_1(x_i)$ — n-мерные векторы

$$\vec{A}_1(x_i) = (A_\kappa\varphi_\kappa(x_i))_1^n, \quad \vec{B}_1(x_i) = (B_\kappa\psi_\kappa(x_i))_1^n, \tag{101}$$

$$\vec{\Omega}_1(x_0) = 0, \ \vec{\Omega}_1(x_1) = 0, \ \vec{\Omega}_1(x_i) = (\Omega_\kappa(x_i))_1^n =$$

$$= \sum_{p=1}^{p=i-1} G(i-p)P_1^*[h^2\vec{\vec{f}}(x_p) - \gamma^2\vec{\omega}_1(x_p)], \tag{101'}$$

A_κ, B_κ — произвольные вещественные постоянные, а функции $\varphi_\kappa(x_i)$, $\psi_\kappa(x_i)$ и диагональная матрица

$$G(i) = [G_\kappa(i)]_1^n$$

в зависимости от величин

$$\eta_\kappa = a - \lambda_\kappa \gamma^2, \quad a = 1 + \gamma^2 + \lambda_h{}^2 \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{101''}$$

определяются формулами, указанными в таблице 1, $\vec{\omega}(x_i)$ — n-мерный вектор

$$\vec{\omega}_1(x_i) = (u_0(x_i), 0, \ldots, 0, u_{n+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta u_n(x_i)). \tag{101'''}$$

В самом деле, прибавляя к обеим частям последнего равенства системы уравнений (15') величину $\gamma^2 \operatorname{tg}\beta\ u_n(x+h)$, можем записать эту систему уравнений в виде

$$R\vec{u}(x) + \gamma^2 T_1 \vec{u}(x+h) = h^2 \vec{f}(x+h) - \gamma^2 \vec{\omega}_1(x+h), \tag{102}$$

где $R\vec{u}(x)$ — то же, что и в уравнении (17). Поступая с уравнением (102) так же, как и с уравнением (17) при доказательстве теоремы 1, убеждаемся в справедливости высказанного утверждения.

2°. Пусть для дифференциального уравнения (24) требуется решить краевую задачу для прямоугольника D_2

$$(x_i y_\kappa) \quad (i = 0, 1, \ldots, m+1, \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{103}$$

(см. рис. 1), когда на горизонтальных сторонах этого прямоугольника заданы величины

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa v\right)_{y=y_1} = \beta(x), \quad v/y = y_{n+1} = \beta_1(x), \tag{25''}$$

где $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ — то же, что и в (25'), $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе прямоугольника D_2, κ — постоянная, которую для определенности будем считать неотрицательной.

Учитывая, что

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{y=y_1} = \frac{v(x, y_0) - v(x, y_1)}{h_1} + 0(h_1), \tag{97'}$$

задачу (24), (25'') можем заменить конечноразностной задачей

$$\Delta_h u - 2\lambda u = f(x, y), \tag{8}$$

$$u_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x_i) = h_1 \beta(x_i), \quad u_{n+1}(x_i) = \beta_1(x_i) \tag{8'''}$$

$$(\operatorname{tg}\alpha = 1 - \kappa h_1, \quad |\operatorname{tg}\alpha| \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m).$$

Для матрицы T_2, определенной равенством

$$T_2 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ & & & & & & & & \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ |\operatorname{tg}\alpha| \leqslant 1, \tag{104}$$

диагональная матрица собственных чисел

$$\Lambda_2 = [\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots, \ \lambda_n] \tag{104'}$$

определяется равенствами

$$\lambda_j = 2\cos\alpha_j, \quad (j = 1, \ 2, \ldots, \ n), \tag{104''}$$

где α_j —корни уравнения

$$\frac{\sin(n+1)\Theta}{\sin n\Theta} = \operatorname{tg}\alpha, \tag{104'''}$$

лежащие в интервале $0 < \Theta < \pi$. В частности, при $\operatorname{tg}\alpha = 1$, что соответствует краевому условию задачи Неймана, $\alpha_j = \frac{2j-1}{2n+1}\pi$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Фундаментальная матрица P_2, соответствующая матрице T_2, имеет вид

$$P_2 = [\vec{p}_1, \ \vec{p}_2, \ldots, \ \vec{p}_n], \tag{105}$$

где

$$\vec{p}_j = C_j(\sin n\alpha_j, \ \sin(n-1)\alpha_j, \ldots, \ \sin\alpha_j), \tag{105'}$$

$$C_j = \left[\sum_{i=1}^{n} \sin^2(n+1-i)\alpha_j\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (j = 1, \ 2, \ldots, \ n).$$

Пользуясь матрицами T_2 и P_2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Для общего решения уравнения

$$\Delta_h u - 2\lambda u = f(x, \ y) \tag{8}$$

в прямоугольнике D (без учета его контурных угловых точек) имеет место равенство

$$\vec{u}(x_i) = P_2\vec{A}_2(x_i) + P_2\vec{B}_2(x_i) + P_2\vec{\Omega}_2(x_i) \tag{106}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, \ m+1),$$

где $\vec{A}_2(x_i)$, $\vec{B}_2(x_i)$, $\vec{\Omega}_2(x_i)$ — n-мерные векторы

$$\vec{A}_2(x_i) = (A_\kappa\varphi_\kappa(x_i))_1^n, \quad \vec{B}_2(x_i) = (B_\kappa\psi_\kappa(x_i))_1^n, \tag{107}$$

$$\vec{\Omega}_2(x_0) = 0, \quad \vec{\Omega}_2(x_1) = 0, \quad \vec{\Omega}_2(x_i) = (\Omega_\kappa(x_i))_1^n =$$

$$= \sum_{p=1}^{p=i-1} G(i-p)P_2^*[h^2\vec{f}(x_p) - \gamma^2\vec{\omega}_2(x_p)], \tag{107'}$$

A_κ, B_κ — произвольные постоянные, а $\varphi_\kappa(x_i)$, $\psi_\kappa(x_i)$ и диагональная матрица

$$G(i) = [G_\kappa(i)]_1^n$$

зависимости от величин

$$\eta_\kappa = a - \lambda_\kappa \gamma^2, \quad a = 1 + \gamma^2 + \lambda h^2 \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n) \qquad (107'')$$

определяются формулами, указанными в таблице 1, $\vec{\omega}_2(x_i)$—n-мерный вектор

$$\vec{\omega}_2(x_i) = (u_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x_i),\ 0, \ldots, 0,\ u_{n+1}(x_i)). \qquad (107''')$$

В самом деле, прибавляя к обеим частям первого из равенств системы уравнений (15′) величину $\gamma^2 \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x+h)$, можем записать эту систему уравнений в виде

$$R\vec{u}(x) + \gamma^2 T_2 \vec{u}(x+h) = h^2 \vec{f}(x+h) - \gamma^2 \vec{\omega}^2(x+h), \qquad (108)$$

где $R\vec{u}(x)$ — то же, что и в уравнении (17). Рассуждая теперь так же, как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся в справедливости формулы (106).

3°. Пусть для дифференциального уравнения (24) требуется решить краевую задачу для прямоугольника D_3

$$(x_i, y_\kappa) \quad (i = 0, 1, \ldots, \quad m+1; \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n) \qquad (109)$$

(см. рис. 1), когда на горизонтальных сторонах этого прямоугольника задаются величины

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa v\right)_{y=y_1} = \beta(x), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa_1 v\right)_{y=y_n} = \beta_1(x), \qquad (25''')$$

где $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ — заданные функции от x, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе прямоугольника D_3, κ и κ_1 — постоянные, которые для определенности будем считать положительными.

Учитывая (97) и (97′), задачу (24), (25″) можем заменить конечно-разностной задачей

$$\Delta_h u - 2\lambda u = f(x, y), \qquad (8)$$

$$u_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x_i) = h_1 \beta(x_i), \quad u_{n+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta\, u_n(x_i) = h_1 \beta_1(x_i) \qquad (8'''')$$

$$(\operatorname{tg}\alpha = 1 - \kappa h_1,\ \operatorname{tg}\beta = 1 - \kappa_1 h_1,\ |\operatorname{tg}\alpha|,\ |\operatorname{tg}\beta| < 1,\ i = 1, 2, \ldots, m).$$

Как было показано в гл. 1, § 3, для матрицы T_3, определенной равенством

$$T_3 = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & \operatorname{tg}\beta \end{bmatrix} \quad |\operatorname{tg}\alpha|,\ |\operatorname{tg}\beta| < 1, \qquad (110)$$

диагональная матрица собственных чисел

$$\Lambda_3 = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \qquad (110')$$

определится равенствами

$$\lambda_j = 2\cos\alpha_j \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{110''}$$

где α_j — корни уравнения

$$\sin(n+1)\Theta - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\sin n\Theta + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\sin(n-1)\Theta = 0, \tag{110'''}$$

лежащие в интервале $0<\Theta<\pi$.

Фундаментальная матрица P_3, соответствующая матрице T_3, имеет вид

$$P_3 = [(\cos\alpha\sin i\alpha_j - \sin\alpha\sin(i-1)\alpha_j)\,c_j]_1^n, \tag{111}$$

где c_j — постоянные

$$c_j = \left[\sum_{i=1}^{n}(\cos\alpha\cdot\sin i\alpha_j - \sin\alpha\sin(i-1)\alpha_j)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ n). \tag{111'}$$

При помощи матриц T_3 и P_3 можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. Для общего решения уравнения

$$\Delta_h u - 2\lambda u = f(x,\ y) \tag{8}$$

в прямоугольнике D (без учета его контурных угловых точек) имеет место равенство

$$\vec{u}(x_i) = P_3\vec{A}_3(x_i) + P_3\vec{B}_3(x_i) + P_3\vec{\Omega}_3(x_i), \tag{112}$$
$$(i = 0, 1, \ldots,\ m+1),$$

где $\vec{A}_3(x_i)$, $\vec{B}_3(x_i)$, $\vec{\Omega}_3(x_i)$ — n-мерные векторы

$$\vec{A}_3(x_i) = (A_\kappa\varphi_\kappa(x_i))_1^n, \quad \vec{B}_3(x_i) = (B_\kappa\psi_\kappa(x_i))_1^n, \tag{113}$$

$$\vec{\Omega}_3(x_0) = 0,\ \vec{\Omega}_3(x_1) = 0,\ \vec{\Omega}_3(x_i) = (\Omega_\kappa(x_i))_1^n =$$
$$= \sum_{p=1}^{p=i-1} G(i-p)\,P_3^*[h^2\vec{f}(x_p) - \gamma^2\vec{\omega}_3(x_p)], \tag{113'}$$

A_κ, B_κ — произвольные постоянные, а $\varphi_\kappa(x_i)$, $\psi_\kappa(x_i)$ и диагональная матрица

$$G(i) = [G_\kappa(i)]_1^n$$

в зависимости от величин

$$\eta_\kappa = a - \lambda_\kappa\gamma^2, \quad a = 1 + \gamma^2 + \lambda h^2 \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{113''}$$

определяются формулами, указанными в таблице 1, $\vec{\omega}_3(x_i)$ — n-мерный вектор

$$\vec{\omega}_3(x_i) = (u_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x_i),\quad 0, \ldots,\ 0,\ u_{n+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta u_n(x_i)]. \tag{113'''}$$

В самом деле, преобразуем систему уравнений (15′), прибавляя к обеим частям первого и последнего равенств, соответственно, величины $\gamma^2 \operatorname{tg} \alpha u_1(x+h)$ и $\gamma^2 \operatorname{tg} \beta u_n(x+h)$. После этого система уравнений (15′) запишется в виде

$$R\vec{u}(x) + T_3 \vec{u}(x+h) = h^2 \vec{f}(x+h) - \gamma^2 \vec{\omega}_3(x+h), \tag{114}$$

где $R\vec{u}(x)$ — то же самое, что и в (17). Поступая с уравнением (114) так же, как и с уравнением (17), убеждаемся в справедливости теоремы.

Замечание. Утверждение теоремы 4 остается справедливым при $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = 1$, что соответствует краевым условиям задачи Неймана. В этом случае величины α_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определяются как корни уравнения

$$\sin(n+1)\Theta - 2\sin n\Theta + \sin(n-1)\Theta = 0$$

или

$$\sin n\Theta (1 - \cos\Theta) = 0$$

и, следовательно,

$$\alpha_j = \frac{\pi}{n} j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{115}$$

Корню α_0 соответствует собственный вектор $(c)_1^n$, $c = \mathrm{const}$.

То же самое можно сказать в случаях $\operatorname{tg} \alpha = 1$, $|\operatorname{tg} \beta| < 1$, $\operatorname{tg} \alpha| < 1$, $\operatorname{tg} \beta = 1$. При этом в первом случае α_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ будут определяться как корни уравнения

$$\left(\cos\frac{2n+1}{2}\Theta - \operatorname{tg} \beta \cos\frac{2n-1}{2}\Theta\right) \sin\frac{\Theta}{2} = 0, \tag{115′}$$

а во втором случае — как корни уравнения

$$\left(\cos\frac{2n+1}{2}\Theta - \operatorname{tg} \alpha \cos\frac{2n-1}{2}\Theta\right) \sin\frac{\Theta}{2} = 0. \tag{115″}$$

п. 5. Обобщение основной формулы суммарных представлений для трехмерных краевых задач. Рассмотрим еще раз трехмерное конечноразностное уравнение

$$\Delta_h u - 2\lambda u = f(x, y, z), \tag{51}$$

где $\Delta_h u$ — трехмерный конечноразностный оператор Лапласа, определенный равенством (48). Найдем общее решение этого уравнения в параллелепипеде D

$$(x_i, y_\kappa, z_j) \quad (i = 0, 1, \ldots, m+1; \quad \kappa = 0, 1, \ldots, n+1;$$
$$j = 0, 1, \ldots, l+1)$$

при несколько более общих предположениях по сравнению с предположениями в п. 2 (см. рис. 4).

Будем предполагать, что на гранях параллелепипеда D, перпендикулярных оси y, заданы величины

$$u_{0j}(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_{1j}(x_i), \quad u_{n+1,\,j}(x_i) - \operatorname{tg}\beta u_{nj}(x_i)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, l; \quad i = 1, 2, \ldots, m), \tag{116}$$

где $\operatorname{tg}\alpha = 1 - \kappa h_1$, $\operatorname{tg}\beta = 1 - \kappa_1 h_1$, κ и κ_1 — неотрицательные постоянные, причем $|\operatorname{tg}\alpha|$, $|\operatorname{tg}\beta| \leqslant 1$.

На гранях, перпендикулярных оси z, будем считать заданными величины

$$u_{\kappa 0}(x_i) - \operatorname{tg}\alpha' u_{\kappa 1}(x_i), \quad u_{kl+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta' u_{\kappa l}(x_i) \tag{117}$$
$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $\operatorname{tg}\alpha' = 1 - \kappa' h_2$, $\operatorname{tg}\beta' = 1 - \kappa_1' h_2$, κ и κ' — постоянные, которые мы будем предполагать неотрицательными, причем $|\operatorname{tg}\alpha'|$, $|\operatorname{tg}\beta'| \leqslant 1$.

По аналогии с (55) и (55′) введем n-мерные векторы

$$\vec{\omega}_j(x_i) = (u_{0j}(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_{1j}(x_i), 0, \ldots, 0\ u_{n+1j}(x_i) - \operatorname{tg}\beta u_{nj}(x_i))$$
$$(j = 1, 2, \ldots, l) \tag{116′}$$

и (n, l)-матрицу

$$\omega(x_i) = [\vec{\omega}_1(x_i), \quad \vec{\omega}_2(x_i), \quad \ldots, \quad \vec{\omega}_l(x_i)] \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{116″}$$

Матрица (116″) будет известной, так как величины (116) по условию заданы.

Далее, пользуясь обозначениями (53), можем сказать, что n-мерные векторы

$$\vec{u}_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha' \vec{u}_1(x_i), \quad \vec{u}_{l+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta' \vec{u}_l(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{117′}$$

также будут известными, поскольку величины (117) заданы.

Известной будет также (n, l)-матрица $f(x_i)$, определенная равенством (54′).

В качестве неизвестных, подлежащих нахождению из уравнения (51), будут элементы (n, l)-матрицы $U(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, m+1)$, определенной равенством (53′).

Рассуждая так же, как и в п. 2, векторные уравнения (58) можем записать в виде

$$R\vec{u}_j(x_i) + \gamma^2 T_3 \vec{u}_j(x_i + h) + \delta^2 \vec{u}_{j-1}(x_i + h) + \delta^2 \vec{u}_{j+1}(x_i + h) =$$
$$= h^2 \vec{f}_j(x_i + h) - \gamma^2 \vec{\omega}_j(x_i + h) \qquad (j = 1, 2, \ldots, l), \tag{58′}$$

где T_3 — матрица порядка n, определенная равенством (110) (с учетом замечаний (115), (115′), (115″)). Равенства (59), (60), (61), (62), (63), (62′), (63′), (64), (64′) остаются неизменными, но только вместо матриц P и Λ в них следует подразумевать соответственно матрицы P_3^* и Λ_3, причем Λ_3 определяется равенством (110′), а P_3^* — матрица, транспонированная по отношению к матрице (111).

Вместо векторов (64″) введем известные l-мерные векторы

$$\vec{g}_\kappa(x_l) = (\hat{u}_{\kappa 0}(x_l) - \operatorname{tg}\alpha'\hat{u}_{\kappa 1}(x_l),\ 0,\ \ldots\ 0,\ \hat{u}_{\kappa l+1}(x_l) - \operatorname{tg}\beta' u_{\kappa l}(x_l))$$
$$(\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (117'')$$

Вместо уравнений (65) будем иметь следующие n — векторные равенства:

$$R\vec{v}_\kappa(x_l) + 2\gamma^2\lambda_\kappa\vec{v}_\kappa(x_l + h) + \delta^2 T_3'\vec{v}_\kappa(x_l + h) = h^2\vec{F}_\kappa(x_l + h) -$$
$$- \gamma^2\vec{w}_\kappa(x_l + h) - \delta^2 g_\kappa(x_l + h) \qquad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (65')$$

где T_3' — матрица порядка l

$$T_3' = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\alpha' & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ & & & & & & & \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & \operatorname{tg}\beta' \end{bmatrix} = P_3'\Lambda_3'P_3'^*, \qquad (118)$$

Λ_3' — диагональная матрица порядка l

$$\Lambda_3 = [\lambda_1'\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_l'], \qquad (118')$$

определяющаяся равенствами

$$\lambda_j = 2\cos\alpha_j \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l), \qquad (118'')$$

где α_j' — корни уравнения

$$\sin(l + 1)\,\Theta - (\operatorname{tg}\alpha' + \operatorname{tg}\beta')\sin l\Theta + \operatorname{tg}\alpha'\operatorname{tg}\beta'\sin(l - 1)\,\Theta = 0, \quad (118''')$$

лежащие в интервале $0 < \Theta < \pi$, P_3' — фундаментальная матрица, соответствующая матрице T_3',

$$P_3' = [(\cos\alpha'\sin i\,\alpha_j' - \sin\alpha'\sin(i - 1)\,\alpha_j')\,C_j]_1^l, \qquad (119)$$

где C_j — постоянные

$$C_j = \left[\sum_{i=1}^{n}(\cos\alpha'\sin i\alpha_j - \sin\alpha'\sin(i - 1)\,\alpha_j')^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l). \qquad (119')$$

Равенства (66) — (71′) остаются без изменения, только везде вместо Λ' и P' следует подразумевать матрицы Λ_3' и $P_3'^*$. Умножая обе части равенства (71) на P_3 и транспонируя обе части полученного матричного равенства, приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 5. Для общего решения трехмерного конечноразностного уравнения

$$\Delta_h u - 2\lambda u = f(x,\ y,\ z) \qquad (51)$$

в параллелепипеде D

$$(x_1,\ y_\kappa,\ z_j)\quad (i=0,\ 1,\ \dots,\ m+1;\quad \kappa=0,\ 1,\ \dots,\ n+1;\quad j=0,\ 1,\ \dots,\ l+1) \tag{51'}$$

(без учета его граничных точек, лежащих на ребрах) имеет место равенство

$$U(x_i)=P_3\,[A(x_i)+B(x_i)+\Omega(x_i)]\,P_3^{'*} \tag{120}$$

$$(i=0,\ 1,\ \dots,\ m+1),$$

где P_3 — матрица n-го порядка (111), P_3 — матрица l-го порядка (119), $U(x_i)$ — $(n,\ l)$-матрица (53′), $A(x_i)$ и $B(x_i)$—$(n,\ l)$-матрицы, определенные равенствами (77) и (78) при $\varphi_{\kappa j}(x_i)$, $\psi_{\kappa j}(x_i)$ ($\kappa=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,l$) определяющихся формулами, указанными в таблице 2. При этом в таблице 2 величины $\eta_{\kappa j}$ определяются формулой (69′) при условии, что λ_κ ($\kappa=1,\ 2,\dots,\ n$) — собственные числа матрицы T_3, определенные равенствами (110″), λ_j' — собственные числа матрицы T_3', определенные равенствами (118″), $\Omega(x_i)$— $(n,\ l)$-матрица, определенная равенствами (79), (79′), в которой величины $G_{\kappa j}(i)$ даются таблицей 2, а $\widehat{\Phi}_{\kappa j}(x_i)$ определяются равенствами

$$\vec{\widehat{\Phi}}_{\kappa j}(x_i)=(\widehat{\Phi}_{\kappa 1}(x_i),\ \ \widehat{\Phi}_{\kappa 2}(x_i),\ \dots,\ \widehat{\Phi}_{\kappa l}(x_i))=$$

$$=P_3^{'*}\,[h^2\vec{F}_\kappa(x_i)-\gamma^2\vec{w}_\kappa(x_i)-\delta^2\vec{g}_\kappa(x_i)]\qquad (\kappa=1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{80'}$$

Векторы $\vec{F}_\kappa(x_i)$ $\vec{w}_\kappa(x_i)$ и $\vec{g}_\kappa(x_i)$ определяются, соответственно, равенствами (64), (64′) и (117″) при условии, что

$$\vec{\widehat{f}}_j(x_i)=(\widehat{f}_{1j}(x_i)\ \widehat{f}_{2j}(x_i),\ \dots,\ \widehat{f}_{nj}(x_i))=P_3^{*}\vec{f}_j(x_i)\qquad (j=1,\ 2,\ \dots,\ l),$$

$$\vec{\widehat{\omega}}_j(x_i)=(\widehat{\omega}_{1j}(x_i),\ \widehat{\omega}_{2j}(x_i),\ \dots,\ \widehat{\omega}_{nj}(x_i))=P_3^{*}\vec{\omega}_j(x_i),$$

$$\vec{\widehat{u}}_j(x_i)=(\widehat{u}_{1j}(x_i),\ \widehat{u}_{2j}(x_i),\ \dots,\ \widehat{u}_{nj}(x_i))=P_3^{*}\vec{u}_j(x_i).$$

Векторы $\vec{u}_j(x_i)$, $\vec{f}_j(x_i)$, $\vec{\omega}_j(x_i)$ определяются, соответственно, равенствами (53), (54), (116′).

Формула (120) при заданных величинах (116), (117), или, что все равно, (116′), (117′), дает явное выражение общего решения конечноразностного уравнения (51) в параллелепипеде D (без учета его граничных точек, лежащих на ребрах) через $2nl$ произвольных постоянных $A_{\kappa j}$, $B_{\kappa j}$ ($\kappa=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,l$).

§ 2. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

п. 1. Формула суммарных представлений для конечноразностного бигармонического оператора. Рассмотрим бигармоническое уравнение для определенности с двумя независимыми переменными

$$\Delta\Delta U = f(x, y) \quad \left(\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4}\right), \tag{121}$$

где $f(x, y)$ — заданная функция от x и y. Конечноразностный оператор, соответствующий оператору $\Delta\Delta U$, построенный по тринадцати точкам прямоугольной равномерной сетки, имеет вид

$\Delta\Delta_h u = \frac{1}{h^4}$ (122)

		γ^4		
	$2\gamma^2$	$-4(1+\gamma^2)\gamma^2$	$2\gamma^2$	
1	$-4(1+\gamma^2)$	$6(1+\gamma^2)+8\gamma^2$	$-4(1+\gamma^2)$	1
	$2\gamma^2$	$-4(1+\gamma^2)\gamma^2$	$2\gamma^2$	
		γ^4		

где γ, h и h_1 — то же самое, что и в § 1. При этом для всякой функции $U(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные до шестого порядка, в узлах сетки имеет место равенство

$$\Delta\Delta_h U = \Delta\Delta U + 0(h^2 + h_1^2). \tag{123}$$

Рассмотрим вопрос об общем решении конечноразностного бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta_h u = f(x_i, y_\kappa) \quad (i = 2, 3, \ldots, m-1, \quad \kappa = 1, 2, \ldots n). \tag{124}$$

Будем предполагать, что заданы контурные значения u по горизонталям

$$u_0(x_i), \quad u_{n+1}(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{125}$$

и заданы величины

$$u_{-1}(x_i) + u_1(x_i), \quad u_{n+2}(x_i) + u_n(x_i) \quad (i = 2, 3, \ldots, m-1), \tag{126}$$

т. е. суммы предконтурных и законтурных значений функций u по горизонталям.

Покажем, что общее решение уравнения (124) в прямоугольнике D без учета его контурных угловых точек (см. рис. 1) в явной форме определяется через $2m$ контурных значений (125), $2(m-2)$ величин (126) и через $4n$ произвольных постоянных.

В самом деле, вводя разностные операторы

$$Ru_\kappa(x) = u_\kappa(x+4h) - 4(1+\gamma^2)u_\kappa(x+3h) + \\ + (6(1+\gamma^4)+8\gamma^2)u_\kappa(x+2h) - 4(1+\gamma^2)u_\kappa(x+h) + u_\kappa(x), \quad (127)$$

$$Qu_\kappa(x) = 2\gamma^2 u_\kappa(x+3h) - 4(1+\gamma^2)\gamma^2 u_\kappa(x+2h) + \\ + 2\gamma^2 u_\kappa(x+h), \quad (128)$$

можем записать конечноразностное уравнение (124) в виде системы уравнений

$$Ru_\kappa(x) + Q[u_{\kappa-1}(x) + u_{\kappa+1}(x)] + \gamma^4[u_{\kappa-2}(x+2h) + u_{\kappa+2}(x+2h)] = \\ = h^4 f_\kappa(x+2h) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \quad (129)$$

или в развернутой форме

$$Ru_1(x) + Qu_2(x) + \gamma^4[-u_1(x+2h) + u_3(x+2h)] = h^4 f_1(x+2h) - \\ - Qu_0(x) - \gamma^4[u_1(x+2h) + u_{-1}(x+2h)],$$

$$Ru_2(x) + Q[u_1(x) + u_3(x)] + \gamma^4 u_4(x+2h) = h^4 f_2(x+2h) - \gamma^4 u_0(x),$$

$$Ru_3(x) + Q[u_2(x) + u_4(x)] + \gamma^4[u_1(x+2h) + u_5(x+2h)] = \\ = h^4 f_3(x+2h), \quad (129')$$

. . . .

. . . .

$$Ru_{n-2}(x) + Q[u_{n-3}(x) + u_{n-1}(x)] + \gamma^4[u_{n-4}(x+2h) + u_n(x+2h)] = \\ = h^4 f_{n-2}(x+2h),$$

$$Ru_{n-1}(x) + Q[u_{n-2}(x) + u_n(x)] + \gamma^4 u_{n-3}(x) = h^4 f_{n-1}(x) - \\ - \gamma^4 u_{n+1}(x+2h),$$

$$Ru_n(x) + Qu_{n-1}(x) + \gamma^4[-u_n(x+2h) + u_{n-2}(x+2h)] = \\ = h^4 f_n(x+2h) - Qu_{n+1}(x) - \gamma^4[u_n(x+2h) + u_{n+2}(x+2h)].$$

Можно проверить справедливость матричного равенства

$$T^2 - 2E = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| \quad (130)$$

где T — матрица, определенная равенством (16), E — единичная матрица порядка n.

Поэтому, вводя n-мерные векторы

$$\vec{\omega}(x+2h) = (Qu_0(x), \quad \gamma^4 u_0(x+2h),\ 0,\ \ldots$$
$$\ldots,\ 0,\ \gamma^4 u_{n+1}(x+2h), \quad Qu_{n+1}(x+2h)), \tag{131}$$

$$\vec{w}(x+2h) = (u_1(x+2h) + u_{-1}(x+2h)_1 0,\ \ldots,$$
$$\ldots,\ 0,\ u_n(x+2h) + u_{n+2}(x+2h)), \tag{132}$$

можем систему уравнений (129′) записать в виде

$$R\vec{u}(x) + QT\vec{u}(x) + \gamma^4 (T^2 - 2E)\vec{u}(x+2h) =$$
$$= h^4 \vec{f}(x+2h) - \vec{\omega}(x+2h) - \gamma^4 \vec{w}(x+2h). \tag{129″}$$

Пользуясь матрицами P и Λ, определенными равенствами (7), (6), (19) и обозначением (20), уравнение (129″) можем записать в виде

$$R\vec{\hat{u}}(x) + \Lambda Q\vec{\hat{u}}(x) + \gamma^2 (\Lambda^2 - 2E)\vec{\hat{u}}(x+2h) = \tag{133}$$
$$= h^4 \vec{\hat{f}}(x+2h) - \vec{\hat{\omega}}(x+2h) - \gamma^4 \vec{\hat{\omega}}(x+2h),$$

или в развернутой форме

$$R\hat{u}_\kappa(x) + 2\lambda_\kappa Q\hat{u}_\kappa(x) + (4\lambda_\kappa^2 - 2)\gamma^4 \hat{u}_\kappa(x+2h) = \tag{133′}$$
$$= h^4 \hat{f}_\kappa(x+2h) - \hat{\omega}_\kappa(x+2h) - \gamma^4 \hat{w}_\kappa(x+2h) \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Учитывая (127), (128), каждое из уравнений (133′) можем записать в виде

$$\hat{u}_\kappa(x+4h) - 4(1+\gamma^2 - \gamma^2\lambda_\kappa) u_\kappa(x+3h) + [6(1+\gamma^4) + 8\gamma^2 -$$
$$- 8\gamma^2\lambda_\kappa(1+\gamma^2) + (4\lambda_\kappa^2 - 2)\gamma^4]\hat{u}_\kappa(x+2h) - 4(1+\gamma^2 - \gamma^2\lambda_\kappa)\hat{u}_\kappa(x+$$
$$+h) + \hat{u}_\kappa(x) = h^4 \hat{f}_\kappa(x+2h) - \hat{\omega}_\kappa(x+2h) - \gamma^4 \hat{w}_\kappa(x+2h),$$

или

$$\hat{u}_\kappa(x+4h) - 4\eta_\kappa \hat{u}_\kappa(x+3h) + (4\eta^2 + 2)\hat{u}_\kappa(x+2h) - 4\eta_\kappa \hat{u}_\kappa(x+h) +$$
$$+ \hat{u}_\kappa(x) = h^4 \hat{f}_\kappa(x+2h) - \hat{\omega}_\kappa(x+2h) - \gamma^4 \hat{w}_\kappa(x+2h), \tag{133″}$$

где

$$\eta_\kappa = 1 + \gamma^2 - \gamma^2\lambda_\kappa, \qquad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{134}$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (133″), имеют вид

$$\mu_\kappa = \eta_\kappa + \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1}, \qquad \nu_\kappa = \eta_\kappa - \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1}, \tag{135′}$$

причем каждый из этих корней будет действительным и двукратным.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (133″), запишется в виде

$$\widehat{u}_\kappa(x) = \widehat{u}_\kappa(x_i) = A_\kappa \mu_\kappa^i + B_\kappa \nu_\kappa^i + C_\kappa i \mu_\kappa^i + D_\kappa i \nu_\kappa^i, \qquad (136)$$

где A_κ, B_κ, C_κ, D_κ — произвольные постоянные.

Частное решение $\widehat{u}_\kappa^0(x)$ уравнения (133″), удовлетворяющее начальным условиям

$$\widehat{u}_\kappa^0(x_0) = \widehat{u}_\kappa^0(x_1) = \widehat{u}_\kappa^0(x_2) = \widehat{u}_\kappa^0(x_3) = 0, \qquad (136')$$

находится методом вариации постоянных и имеет вид

$$\widehat{u}_\kappa^0(x_i) = \sum_{p=1}^{p=i-3} \frac{\begin{vmatrix} \mu_\kappa^p & \nu_\kappa^p & p\mu_\kappa^p & p\nu_\kappa^p \\ \mu_\kappa^{p+1} & \nu_\kappa^{p+1} & (p+1)\mu_\kappa^{p+1} & (p+1)\nu_\kappa^{p+1} \\ \mu_\kappa^{p+2} & \nu_\kappa^{p+2} & (p+2)\mu_\kappa^{p+2} & (p+2)\nu_\kappa^{p+2} \\ \mu_\kappa^i & \nu_\kappa^i & i\mu_\kappa^i & i\nu_\kappa^i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_\kappa^p & \nu_\kappa^p & p\mu_\kappa^p & p\nu_\kappa^p \\ \mu_\kappa^{p+1} & \nu_\kappa^{p+1} & (p+1)\mu_\kappa^{p+1} & (p+1)\nu_\kappa^{p+1} \\ \mu_\kappa^{p+2} & \nu_\kappa^{p+2} & (p+2)\mu_\kappa^{p+2} & (p+2)\nu_\kappa^{p+2} \\ \mu_\kappa^{p+3} & \nu_\kappa^{p+3} & (p+3)\mu_\kappa^{p+3} & (p+3)\nu_\kappa^{p+3} \end{vmatrix}} \Phi_\kappa(x_{p+1}), \qquad (136)$$

где через $\Phi_\kappa(x+2h)$ обозначена правая часть уравнения (133″).

После некоторых упрощений правой части равенства (136″) общее решение уравнения (133″) запишется в виде

$$\widehat{u}_\kappa(x_i) = A_\kappa \mu_\kappa^i + B_\kappa \nu_\kappa^i + C_\kappa i \mu_\kappa^i + D_\kappa i \nu_\kappa^i + \sum_{p=2}^{p=i-2} \frac{1}{(\mu_\kappa - \nu_\kappa)^3} \Big[(i-p-$$
$$-1)(\mu_\kappa^{i-p+1} - \nu_\kappa^{i-p+1}) - (i-p+1)(\mu_\kappa^{i-p-1} - \nu_\kappa^{i-p-1})\Big] \Phi_\kappa(x_p). \qquad (136''')$$

Введем четыре n-мерных вектора произвольных постоянных

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (A_1, A_2, \ldots, A_n), & \vec{B} &= (B_1, B_2, \ldots, B_n), \\ \vec{C} &= (C_1, C_2, \ldots, C_n), & \vec{D} &= (D_1, D_2, \ldots, D_n) \end{aligned} \qquad (137)$$

и диагональные матрицы порядка n

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n], \quad \nu = [\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n], \qquad (137')$$
$$G(i) = [G_1(i), G_2(i), \ldots, G_n(i)], \qquad (138)$$

где

$$G_\kappa(i) = \frac{1}{(\mu_\kappa - \nu_\kappa)^3} \left[(i-1)\left(\mu_\kappa^{i+1} - \nu_\kappa^{i+1}\right) - (i+1)\left(\mu_\kappa^{i-1} - \nu_\kappa^{i-1}\right)\right]$$
$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n). \qquad (138')$$

При введенных обозначениях в силу (136‴) общее решение векторного уравнения (133) запишется в виде

$$\vec{\hat{u}}(x_i) = \mu^i \vec{A} + \nu^i \vec{B} + i\mu^i \vec{C} + i\nu^i \vec{D} +$$

$$+ \sum_{p=2}^{p=i-2} G(i-p)\,[h^4 \vec{\hat{f}}(x_p) - \vec{\hat{\omega}}(x_p) - \gamma^4 \vec{\hat{w}}(x_p)], \qquad (139)$$

где последняя сумма считается равной нулю при $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Умножая обе части равенства (139) на P, получаем искомое общее решение конечноразностного уравнения (124) в виде формулы

$$\vec{u}(x_i) = P\mu^i \vec{A} + P\nu_i \vec{B} + iP\mu^i \vec{C} + iP_\nu{}^i \vec{D} +$$

$$+ \sum_{p=2}^{p=i-2} PG(i-p)\,P\,[h^4 \vec{f}(x_p) - \vec{\omega}(x_p) - \gamma^4 \vec{w}(x_p)] \qquad (140)$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m+1),$$

где последняя сумма считается равной нулю при $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Эта формула суммарных представлений выражает общее решение конечноразностного бигармонического уравнения (124) в прямоугольнике D через $2m$ контурных значений (125) в соответствии с (131), через $2m - 4$ величин (126) в соответствии с (132) и через $4n$ произвольных постоянных (137).

п. 2. Решение бигармонических краевых задач. Рассмотрим краевую задачу для бигармонического дифференциального уравнения для прямоугольника $D_0\,(x_1 \leqslant x \leqslant x_m,\ y_0 \leqslant y \leqslant y_{n+1})$ (см. рис. 6):

$$\Delta\Delta U = f(x,\ y) \quad \left(\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4}\right), \qquad (121)$$

$$U/_S = \beta(s), \qquad (121')$$

$$NU/_S = \beta_1(s), \qquad (121'')$$

где $\beta(s)$ и $\beta_1(s)$ — заданные функции длины дуги s границы S прямоугольника D_0, Nu — оператор краевых условий, который на горизонтальных и вертикальных сторонах прямоугольника D_0 может быть задан в том или ином виде.

Приближенное решение задачи (121), (121′), (121″) ищем в виде решения конечноразностной бигармонической задачи

$$\Delta\Delta_h u = f(x_i,\ y_\kappa) \quad (i = 2,\ 3,\ \ldots,\ m-1;\quad \kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (125)$$

$$u/_S = \beta(s), \qquad (125')$$

$$N_h u/_S = \beta_1^*(s), \qquad (125'')$$

где $N_h u$ — конечноразностный оператор, определяющийся через оператор Nu, $\beta_1^*(s)$ — заданная функция от s.

Введем обозначения для n-мерных векторов

$$\vec{F}(x_i) = h^4 \sum_{p=2}^{p=i-2} G(i-p)\, P\vec{f}(x_p), \quad \vec{F}(x_0) = \vec{F}(x_1) = \vec{F}(x_2) = $$
$$= \vec{F}(x_3) = 0, \tag{141}$$

$$\vec{\Omega}(x_i) = \sum_{p=2}^{p=i-2} G(i-p)\, P\vec{\omega}(x_p), \quad \vec{\Omega}(x_0) = \vec{\Omega}(x_1) = \vec{\Omega}(x_2) = \vec{\Omega}(x_3) = 0, \tag{141'}$$

$$\vec{W}(x_i) = \gamma^4 \sum_{p=2}^{p=i-2} G(i-p)\, P\vec{w}(x_p), \quad \vec{W}(x_0) = \vec{W}(x_1) = \vec{W}(x_2) = $$
$$= \vec{W}(x_3) = 0. \tag{141''}$$

При введенных обозначениях формула суммарных представлений (140) запишется в виде

$$\vec{u}(x_i) = P\mu^i\vec{A} + P\nu^i\vec{B} + iP\mu^i\vec{C} + iP\nu^i\vec{D} + P\vec{F}(x_i) - P\vec{\Omega}(x_i) -$$
$$- P\vec{W}(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, m+1). \tag{140'}$$

В этой формуле векторы $\vec{F}(x_i)$ и $\vec{\Omega}(x_i)$ в силу краевого условия (125') на горизонтальных сторонах прямоугольника D_0 являются заданными.

Краевое условие (125') на вертикальных сторонах прямоугольника D_0 дает систему уравнений

$$\mu(\vec{A} + \vec{C}) + \nu(\vec{B} + \vec{D}) = \vec{\hat{u}}(x_1), \tag{142}$$

$$\mu^m(\vec{A} + m\vec{C}) + \nu^m(\vec{B} + m\vec{D}) = \vec{\hat{u}}(x_m) - \vec{F}(x_m) + \vec{\Omega}(x_m) + \vec{W}(x_m). \tag{142'}$$

Оператор краевых условий $N_h u$ будем называть оператором первого рода, если он представляет собой разность между законтурными и предконтурными значениями функции u. Будем называть этот оператор оператором второго рода, если он представляет собой сумму законтурного и предконтурного значений функции u.. Операторы первого и второго рода, соответственно, будем обозначать через $N'_h u$ и $N''_h u$. Очевидно, что оператор N'_hи можно считать заданным в том случае, если оператор NU краевой задачи (121), (121'), (121'') имеет вид $\frac{\partial U}{\partial n}$, где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе прямоугольника D_0. Оператор $N'_h u$ можно считать заданным в том случае, если оператор NU краевой задачи (121), (121'), (121'') имеет вид $NU \doteq = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные краевые задачи вида (121), (121'), (121'') для прямоугольника D_0, или, точнее, соответствующие им конечноразностные задачи вида (125), (125'), (125'').

1°. На горизонтальных и вертикальных сторонах прямоугольника D_0 задан оператор $N''_h u$

$$N''_h u|_{y=y_0} = \beta_1^*(s), \qquad N''_h u|_{y=y_{n+1}} = \beta_1^*(s), \tag{143}$$

$$N''_h u|_{x=x_1} = \beta_1^*(s), \qquad N''_h u|_{x=x_m} = \beta_1^*(s). \tag{144}$$

В этом случае в силу (143), как видно из (132) и (141''), вектор $\vec{W}(x_i)$ и, в частности, векторы $\vec{W}(x_1)$, $\vec{W}(x_m)$ будут известными.

Краевые условия (144) дают систему уравнений

$$\vec{A} + \vec{B} + \mu^2\vec{A} + \nu^2\vec{B} + 2\mu^2\vec{C} + 2\nu^2\vec{D} = \overrightarrow{N''_h \hat{u}}|_{x=x_1}, \tag{145}$$

$$\mu^{m-1}\vec{A} + \nu^{m-1}\vec{B} + (m-1)\mu^{m-1}\vec{C} + (m-1)\nu^{m-1}D +$$
$$+ \mu^{m+1}\vec{A} + \nu^{m+1}\vec{B} + (m+1)\mu^{m+1}\vec{C} + (m+1)\nu^{m+1}\vec{D} =$$
$$= \overrightarrow{N''_h \hat{u}}|_{x=x_m}[(\vec{F}(x_{m-1}) + F(x_{m+1})) + \vec{\Omega}(x_{m+1}) + \vec{W}(x_{m-1}) +$$
$$+ \vec{W}(x_{m+1})]. \tag{145'}$$

Таким образом, для определения $4n$ постоянных A_κ, B_κ, C_κ, D_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$) имеем $4n$ уравнений (142), (142'), (145), (145'). Правые части этих уравнений известны, и данная система $4n$ уравнений распадается на n систем уравнений вида

$$\mu_\kappa A_\kappa + \nu_\kappa B_\kappa + \mu_\kappa C_\kappa + \nu_\kappa D_\kappa = a_\kappa,$$
$$\mu_\kappa^m A_\kappa + \nu_\kappa^m B_\kappa + m\mu_\kappa^m C_\kappa + m\nu_\kappa^m D_\kappa = b_\kappa,$$
$$(1+\mu_\kappa^2) A_\kappa + (1+\nu_\kappa^2) B_\kappa + 2\mu_\kappa^2 C_\kappa + 2\nu_\kappa^2 D_\kappa = c_\kappa, \tag{146}$$
$$\left(\mu_\kappa^{m-1} + \mu_\kappa^{m+1}\right) A_\kappa + \left(\nu_\kappa^{m-1} + \nu_\kappa^{m+1}\right) B_\kappa + \left[(m-1)\mu_\kappa^{m-1} +\right.$$
$$\left.+ (m+1)\mu_\kappa^{m+1}\right] C_\kappa + \left[(m-1)\nu_\kappa^{m-1} + (m+1)\nu_\kappa^{m+1}\right] D_\kappa = d_\kappa$$
$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n),$$

где через a_κ, b_κ, c_κ, d_κ обозначены известные компоненты векторов правых частей, соответственно, равенств (142), (142'), (145), (145').

Подсчитаем определители $\Delta_\kappa (\kappa = 1, 2, \ldots, n)$ систем уравнений (146). Имеем

$$\Delta_\kappa = \begin{vmatrix} \mu_\kappa & \nu_\kappa & \mu_\kappa & \nu_\kappa \\ \mu_\kappa^m & \nu_\kappa^m & m\mu_\kappa^m & m\nu_\kappa^m \\ 1+\mu_\kappa^2 & 1+\nu_\kappa^2 & 2\mu_\kappa^2 & 2\nu_\kappa^2 \\ \mu_\kappa^{m-1}+ & \nu_\kappa^{m-1}+ & (m-1)\mu_\kappa^{m-1}+ & (m-1)\nu_\kappa^{m-1}+ \\ +\mu_\kappa^{m+1} & +\nu_\kappa^{m+1} & +(m+1)\mu_\kappa^{m+1} & +(m+1)\nu_\kappa^{m+1} \end{vmatrix}$$

Учитывая, что $\mu_\kappa \nu_\kappa = 1$, находим

$$\Delta_\kappa = \begin{vmatrix} \mu_\kappa & 0 & 0 & 0 \\ \mu_\kappa^m & \nu_\kappa^m - \mu_\kappa^{m-2} & (m-1)\mu_\kappa^m & (m-1)\nu_\kappa^m \\ 1+\mu_\kappa^m & 0 & \mu_\kappa^2 - 1 & 1+\nu_\kappa^2 \\ \mu_\kappa^{m-1}+\mu_\kappa^{m+1} & \nu_\kappa^{m-1}+\nu_\kappa^{m+1}- & (m-2)\mu_\kappa^{m-1}+ & (m-2)\nu_\kappa^{m-1}+ \\ & -\mu_\kappa^{m-3}-\mu_\kappa^{m-1} & +m\mu_\kappa^{m+1} & +m\nu_\kappa^{m+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \nu_\kappa^{m-1} - \mu_\kappa^{m-1} & (m-1)\mu_\kappa^{m+1} & (m-1)\nu_\kappa^{m-1} \\ 0 & \mu_\kappa^2 - 1 & 1+\nu_\kappa^2 \\ \nu_\kappa^{m-1}+\nu_\kappa^{m+1}-\mu_\kappa^{m-3}- & (m-2)\mu_\kappa^{m-1}+ & (m-2)\nu_\kappa^{m-1}+ \\ -\mu_\kappa^{m-1} & +m\mu_\kappa^{m+1} & +m\nu_\kappa^{m+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \nu_\kappa^{m-1} - \mu_\kappa^{m-1} & (m-1)\mu_\kappa^{m+1} & (m-1)\nu_\kappa^{m-1} \\ 0 & \mu_\kappa^2 - 1 & 1+\nu_\kappa^2 \\ \nu_\kappa^{m+1} - \mu_\kappa^{m-3} & (m-2)\mu_\kappa^{m-1} + \mu_\kappa^{m+1} & -\nu_\kappa^{m-1} + m\nu_\kappa^{m+1} \end{vmatrix}$$

Таким образом, находим

$$\Delta_\kappa = \begin{vmatrix} \nu_\kappa^{m-1} - \mu_\kappa^{m-1} & (m-1)\mu_\kappa^{m+1} & (m-1)\nu_\kappa^{m-1} \\ 0 & \mu_\kappa^2 - 1 & 1+\nu_\kappa^2 \\ 0 & -\mu_\kappa^{m-1} + \mu_\kappa^{m+1} & -\nu_\kappa^{m-1} + \nu_\kappa^{m+1} \end{vmatrix} =$$

$$= (\nu_\kappa^{m-1} - \mu_\kappa^{m-1})(\mu_\kappa^2 - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1+\nu_\kappa^2 \\ \mu_\kappa^{m-1} & -\nu_\kappa^{m-1} + \nu_\kappa^{m+1} \end{vmatrix}$$

или

$$\Delta_\kappa = (\mu_\kappa - \nu_\kappa)\left(\mu_\kappa^{m-1} - \nu_\kappa^{m-1}\right)\left[\mu_\kappa^{m-2} + \nu_\kappa^{m-2} + \mu_\kappa^m - \nu_\kappa^m\right]$$
$$(\kappa = 1,\ 2, \ldots ,\ n). \tag{147}$$

Из (147) видим, что определитель каждой из систем уравнений (146) отличен от нуля. Решая каждую из этих систем уравнений с четырьмя неизвестными и подставляя найденные значения A_κ, B_κ, C_κ, D_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$) в формулу (140′), получаем в явной форме решение конечноразностной краевой задачи (125), (125′), (143); (144). Тем самым находится в явной форме приближенное решение бигармонической задачи (121), (121′), (121″) для прямоугольника D_0 в том случае, когда оператор Nu имеет вид $NU = \frac{d^2U}{dn^2}$, что соответствует, например, случаю изгибания прямоугольной пластинки при свободно опертых краях.

2°. На горизонтальных сторонах прямоугольника D_0 задан оператор $N_h''u$, т. е. краевые условия имеют вид (143), а на вертикальных сторонах прямоугольника D_0 задан оператор $N_h'u$

$$N_h'u\,|_{x=x_1} = \beta_1^*(s), \qquad N_h'u\,|_{x=x_m} = \beta_1^*(s). \tag{144′}$$

В этом случае в силу (143) вектор $\vec{W}(x_i)$ будет известен. Краевые условия (144′) дают систему уравнений

$$\vec{A} + \vec{B} - \mu^2\vec{A} - \nu^2\vec{B} - 2\mu^2\vec{C} - 2\nu^2\vec{D} = \overrightarrow{N_h'u}\,|_{x=x_1}, \tag{148}$$

$$\mu^{m+1}\vec{A} + \nu^{m+1}\vec{B} + (m+1)\,\mu^{m+1}\vec{C} + (m+1)\,\nu^{m+1}\vec{D} - \mu^{m-1}\vec{A} -$$
$$- \nu^{m-1}\vec{B} - (m-1)\,\mu^{m-1}\vec{C} - (m-1)\,\nu^{m-1}\vec{D} = \overrightarrow{N_h^1\hat{u}}/_{x=x_m}. \tag{148′}$$

Таким образом, для определения $4n$ постоянных A_κ, B_κ, C_κ, D_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$) имеем $4n$ уравнений (142), (142′), (148), (148′). Правые части этих уравнений известны, и данная система $4n$ уравнений распадается на n систем уравнений вида

$$\begin{gathered}
\mu_\kappa A_\kappa + \nu_\kappa B_\kappa + \mu_\kappa C_\kappa + \nu_\kappa D_\kappa = a_\kappa,\\
\mu_\kappa^m A_\kappa + \nu_\kappa^m B_\kappa + m\mu_\kappa^m C_\kappa + m\nu_\kappa^m D_\kappa = b_\kappa,\\
\left(1 - \mu_\kappa^2\right) A_\kappa + \left(1 - \nu_\kappa^2\right) B_\kappa - 2\mu_\kappa^2 C_\kappa - 2\nu_\kappa^2 D_\kappa = c_\kappa',\\
\left(\mu_\kappa^{m+1} - \mu_\kappa^{m-1}\right) A_\kappa + \left(\nu_\kappa^{m+1} - \nu_\kappa^{m-1}\right) B_\kappa + \left[(m+1)\,\mu_\kappa^{m+1} - (m -\right.\\
\left.- 1)\,\mu_\kappa^{m-1}\right] C_\kappa + \left[(m+1)\,\nu_\kappa^{m+1} - (m-1)\,\nu_\kappa^{m-1}\right] D_\kappa = d_\kappa'\\
(\kappa = 1,\ 2, \ldots ,\ n),
\end{gathered} \tag{149}$$

где через a_κ, b_κ, c_κ', d_κ' обозначены известные компоненты векторов правых частей, соответственно, равенств (142), (142′), (148), (148′).

Для определителей Δ_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$) систем уравнений (149), учитывая, что $\mu_\kappa \nu_\kappa = 1$, находим

$$\Delta_\kappa = \begin{vmatrix} \nu_\kappa^{m-1} - \mu_\kappa^{m-1} & (m-1)\mu_\kappa^{m+1} & (m-1)\nu_\kappa^{m-1} \\ 2\left(1-\nu_\kappa^2\right) & -\left(1+\mu_\kappa^2\right) & -\left(1+\nu_\kappa^2\right) \\ \nu_\kappa^{m+1} - \nu_\kappa^{m-1} - & m\mu_\kappa^{m+1} - & m\nu_\kappa^{m+1} - \\ -\mu_\kappa^{m-1} + \mu_\kappa^{m-3} & -(m-2)\mu_\kappa^{m-1} & -(m-2)\nu_\kappa^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \nu_\kappa^{m-1} \begin{vmatrix} 2\left(1-\nu_\kappa^2\right) & \mu_\kappa^{2m} + \mu_\kappa^{2m-2} - \mu_\kappa^2 - 1 \\ -\nu_\kappa^{m+1} - \nu_\kappa^{m-1} + & 2(m-1)^2\left(\mu_\kappa^{m+1} - \mu_\kappa^{m-1}\right) \\ + \mu_\kappa^{m+1} + \mu_\kappa^{m-3} & \end{vmatrix}.$$

После несложных преобразований находим

$$\Delta_\kappa = 4(m-1)^2(\mu_\kappa - \nu_\kappa)^2 - (\mu_\kappa + \nu_\kappa)^2\left(\mu_\kappa^{m-1} - \nu_\kappa^{m-1}\right)^2$$
$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n). \qquad (150)$$

Покажем, что все определители (150) отличны от нуля. Имеем

$$\nu_\kappa^{2m}\Delta_\kappa = 4(m-1)^2\left(1-\nu_\kappa^2\right)\nu_\kappa^{2m-2} - (1+\nu_\kappa)^2\left(1-\nu_\kappa^{2m-2}\right)^2.$$

Отсюда находим

$$\frac{\nu_\kappa^{2m}\Delta_\kappa}{2(m-1)\left(1-\nu_\kappa^2\right)\nu_\kappa^{m-1} + \left(1+\nu_\kappa^2\right)\left(1-\nu_\kappa^{2m-2}\right)} =$$
$$= 2(m-1)\left(1-\nu_\kappa^2\right)\nu_\kappa^{m-1} - \left(1+\nu_\kappa^2\right)\left(1-\nu_\kappa^{2m-2}\right).$$

Нули функции

$$X(\nu_\kappa)\Delta_\kappa\nu_\kappa^{m+1}\left(1-\nu_\kappa^2\right)^{-1}\left[2(m-1)\left(1-\nu_\kappa^2\right)\nu_\kappa^{m-1} + \right.$$
$$\left. + \left(1+\nu_\kappa^2\right)\left(1-\nu_\kappa^{2m-2}\right)\right]^{-1}$$

при $0 < \nu_\kappa < 1$ совпадают с нулями определителя Δ_κ. С другой стороны, имеем

$$X(\nu_\kappa) = 2(m-1) - \left(\nu_\kappa + \frac{1}{\nu_\kappa}\right)\frac{1}{\nu_\kappa^{m-2}}\left[1 + \nu_\kappa^2 + \ldots + \nu_\kappa^{2(m-2)}\right].$$

При $(m-1)$ четном и $(m-1)$ нечетном можем, соответственно, записать

$$X(\nu_\kappa) = 2(m-1) - (\mu_\kappa + \nu_\kappa)\left[\left(\mu_\kappa^{m-2} + \nu_\kappa^{m-2}\right) + \left(\mu_\kappa^{m-4} + \nu_\kappa^{m-4}\right) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (\mu_\kappa + \nu_\kappa)\right],$$

$$X(\nu_\kappa) = 2(m-2) - (\mu_\kappa + \nu_\kappa)\left[\left(\mu_\kappa^{m-2} + \nu_\kappa^{m-2}\right) + \left(\mu_\kappa^{m-4} + \nu_\kappa^{m-4}\right) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \left(\mu_\kappa^2 + \nu_\kappa^2\right)\right] + 2 - (\mu_\kappa + \nu_\kappa).$$

Отсюда видно, что $X(\nu_\kappa) < 0$ при $0 < \nu_\kappa < 1$ и, следовательно, определители (150) систем уравнений (149) отличны от нуля (меньше нуля). Решая каждую из этих систем с четырьмя неизвестными и подставляя в формулу (140′), получаем в явной форме решение конечноразностной краевой задачи (125), (125′), (143), (143′). Этим самым мы находим в явной форме приближенное решение бигармонической задачи (121), (121′), (121″) для прямоугольника D_0 в том случае, когда оператор $NU = \frac{\partial U^2}{dn^2}$ на горизонтальных сторонах прямоугольника и $NU = \frac{\partial U}{\partial n}$ на вертикальных сторонах данного прямоугольника. Такие краевые условия соответствуют, например, случаю изгибания прмоугольной пластинки, когда горизонтальные ее стороны свободно оперты, а вертикальные стороны жестко заделаны.

Точно таким же способом получается в явной форме решение конечноразностной задачи (125), (125′), (125″), соответствующей прямоугольнику D_0 в том случае, когда краевое условие (125″) на горизонтальных сторонах прямоугольника совпадает с (143), а на вертикальных его сторонах частично имеет вид (144) и частично (144′). В этом случае вектор $\vec{W}(x_i)$ является известным, а $4n$ постоянных $A_к$, $B_к$, $C_к$, $D_к$ ($к = 1, 2, \ldots, n$), которые следует подставить в формулу (140′), определяются из систем уравнений (142), (142′) и из $2n$ уравнений, которые получаются за счет краевого условия (125″) на вертикальных сторонах прямоугольника D_0. С физической точки зрения это, например, соответствует изгибу прямоугольной пластинки, горизонтальные стороны которой свободно оперты, а вертикальные частично жестко заделаны и частично свободно оперты.

3°. Пусть теперь краевое условие (125″) такое, что оператор $N_h u$ на горизонтальных сторонах прямоугольника D_0 частично совпадает с $N'_h u$ и частично с $N''_h u$. Пусть q означает при этом количество точек, в которых $N_h u$ совпадает с $N'_h u$. Тогда вектор $\vec{W}(x_i)$ будет выражаться через q предконтурных значений функции u, соответствующих тем точкам, в которых $N_h u = N'_h u$. Уравнения (142), (142′) и $2n$ уравнений, которые получаются за счет краевого условия (125″) на вертикальных сторонах прямоугольника D_0, в общей сложности будут составлять $4n$ линейных алгебраических уравнений. Общее количество неизвестных, подлежащих определению, равно $4n + q$, а именно: постоянные $A_к$, $B_к$, $C_к$, $D_к$ ($к = 1, 2, \ldots, n$) и q предконтурных значений функции u. Записав по формуле (140′) соответствующие выражения для неизвестных предконтурных значений, мы получим q недостающих линейных алгебраических уравнений. Определив из полученной таким образом системы $4n + q$ уравнений постоянные $A_к$, $B_к$, $C_к$, $D_к$ и q неизвестных предконтурных значений и подставив в формулу (140′), получаем в явной форме решение конечноразностной задачи (125), (125′), (125″), соответствующей прямоугольнику D_0. Этим самым мы находим также в явной форме приближенное решение бигармонической задачи (121), (121'), (121''), соответствующей, например, изгибу прямоугольной пластинки, когда любая из ее сторон частично свободно оперта, частично жестко заделана.

4°. Пусть теперь требуется решить бигармоническую краевую задачу (121), (121'), (121'') для области G, составленной из двух прямоугольников — D_0 и D_0', например так, как указано на рис. 7.

Прямоугольник D_0' вместе с присоединенными к нему «точками подкладки»

$$\begin{aligned} &(x_{m-1},\ y_\kappa) \qquad (\kappa = n_0,\ n_0+1,\ \ldots,\ n_0+n'+1), \\ &(x_{m-2},\ y_\kappa) \qquad (\kappa = n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots,\ n_0+n') \end{aligned} \tag{151}$$

будем называть окаймленным прямоугольником и обозначим его через $\bar{D}_0$.

Характерным является то, что значения функции u в точках A', A'', B', B'' будут известными, если в точках A и B (см. рис. 7) $N_h u = N_h' u$ или $N_h u = N_h'' u$.

Учитывая, что значения функции u известны в точках A' и B' и на горизонтальных сторонах прямоугольника D_0', наряду с формулой (140') для прямоугольника D_0 можем написать соответствующую формулу для прямоугольника $\overline{D_0'}$. Эта формула будет иметь вид

$$\vec{u}'(x_{m-2+1}) = P'\mu'^i\vec{A}' + P'\nu'^i\vec{B}' + iP'\mu'^i\vec{C}' + iP'\nu'^i\vec{D}' + P'\vec{F}'(x_{m-2+1}) - \\ - P'\vec{\Omega}'(x_{m-2+i}) - P'\vec{W}'(x_{m-2+i}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m'+1), \tag{140''}$$

где $\vec{A}'$, $\vec{B}'$, $\vec{C}'$, $\vec{D}'$ — n'-мерные векторы произвольных постоянных

$$\begin{aligned} &\vec{A}' = (A_1',\ A_2',\ \ldots,\ A_{n'}'), \qquad \vec{B}' = (B_1',\ B_2',\ \ldots,\ B_{n'}'), \\ &\vec{C}' = (C_1',\ C_2',\ \ldots,\ C_{n'}'), \qquad \vec{D}' = (D_1',\ D_2',\ \ldots,\ D_{n'}'); \end{aligned} \tag{152}$$

P' — матрица порядка n':

$$P' = \sqrt{\frac{2}{n'+1}}\left[\sin\frac{i\kappa\pi}{n'+1}\right]_1^{n'}; \tag{153}$$

μ' и ν' — диагональные матрицы порядка n'

$$\mu' = [\mu_1',\ \mu_2',\ \ldots,\ \mu_{n'}'], \qquad \nu' = [\nu_1',\ \nu_2',\ \ldots,\ \nu_{n'}']; \tag{153'}$$

μ_κ' и ν_κ' определяются равенствами

$$\mu_\kappa' = \eta_\kappa' + \sqrt{\eta_\kappa'^2 - 1}, \qquad \nu_\kappa' = \eta_\kappa' - \sqrt{\eta_\kappa'^2 - 1} \\ (\eta_\kappa' = 1 + \gamma^2 - \gamma^2\lambda_\kappa'), \\ \lambda_\kappa' = \cos\frac{\kappa\pi}{n'+1} \qquad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n'); \tag{153''}$$

$\vec{u}'(x_{m-2+i})$, $\vec{F}'(x_{m-2+i})$, $\vec{\Omega}'(x_{m-2+i})$, $\vec{W}(x_{m-2+i})$ — n'-мерные векторы:

$$\vec{u}'(x) = (u_1'(x),\ u_2'(x), \dots ,\ u_{n'}'(x)) =$$
$$= u_{n_0+1}(x),\ u_{n_0+2}(x), \dots ,\ u_{n_0+n'}(x)), \tag{154}$$

$$\vec{F}'(x_{m-2+i}) = h^4 \sum_{p=2}^{p=i-2} G'(i-p)\, P'\vec{f}'(x_{m-2+p}), \tag{155}$$

$$\vec{F}'(x_{m-2}) = \vec{F}'(x_{m-1}) = \vec{F}'(x_m) = \vec{F}'(x_{m+1}) = 0,$$

$$\vec{\Omega}'(x_{m-2+i}) = \sum_{p=2}^{p=i-2} G'(i-p)\, P'\vec{\omega}'(x_{m-2+p}), \tag{155'}$$

$$\vec{\Omega}'(x_{m-2}) = \vec{\Omega}'(x_{m-1}) = \vec{\Omega}(x_m) = \vec{\Omega}'(x_{m+1}) = 0,$$

$$\vec{W}'(x_{m-2+i}) = \gamma^4 \sum_{p=2}^{p=i-2} G'(i-p)\, P'\vec{w}'(x_{m-2+p}), \tag{155''}$$

$$\vec{W}'(x_{m-2}) = \vec{W}'(x_{m-1}) = \vec{W}'(x_m) = \vec{W}'(x_{m+1}) = 0.$$

Тут $G'(i)$ — диагональная матрица порядка n', определенная равенствами (138), (138') при условии, что вместо n подставляется n', а μ_κ и ν_κ заменены, соответственно, на μ_κ' и ν_κ'; $\vec{f}'(x)$, $\vec{\omega}'(x)$, $\vec{W}'(x)$ — n'-мерные векторы:

$$\vec{f}'(x) = (f_1'(x),\ f_2'(x), \dots ,\ f_{n'}'(x)) =$$
$$= (f_{n_0+1}(x),\ f_{n_0+2}(x), \dots ,\ f_{n_0+n'}(x)), \tag{156}$$

$$\vec{\omega}'(x+2h) = (Qu_{n_0}(x),\ \gamma^4 u_{n_0}(x+2h),\ 0, \dots$$
$$0 \dots ,\ \gamma^4 u_{n_0+n'+1}(x+2h),\quad Qu_{n_0+n'+1}(x)), \tag{156'}$$

$$\vec{W}'(x+2h) = (u_{n_0+1}(x+2h) + u_{n_0-1}(x+2h),\ 0, \dots$$
$$, \dots ,\ 0,\ u_{n_0+n'}(x+2h) + u_{n_0+n'+2}(x+2h)). \tag{156''}$$

Здесь $Qu(x)$ — оператор, определенный равенством (128).

В силу того, что значения функции u в точках A' и B' известны, и в силу краевого условия (125') вектор $\vec{\omega}'(x)$ на интересующем нас участке $x_{m-1} \leqslant x \leqslant {}_{m+m'-2}$ будет известен и, следовательно, будет известным вектор $\vec{\Omega}'(x_{m-2+i})$ в формуле (140").

Предположим, что краевое условие (125") на горизонтальных отрезках, входящих в состав границы области G, такое, что $N_h u = N_h'' u$. Тогда в правые части формул (140') и (140") входит только $4n + 4n'$

неизвестных постоянных: n-мерные векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ и n'-мерные векторы $\vec{A}'$, $\vec{B}'$, $\vec{C}'$, $\vec{D}'$.

Краевое условие (125′) на вертикальных отрезках, входящих в состав границы области G, дает $2n$ уравнений

$$\mu\vec{A} + \nu\vec{B} + \mu\vec{C} + \nu\vec{D} = \vec{\hat{u}}(x_1), \tag{157}$$

$$[P(\mu^m\vec{A} + \nu^m\vec{B} + m\mu^m\vec{C} + m\nu^m\vec{D})]_\kappa = u_\kappa(x_m) + \\ + [P(-\vec{F}(x_m) + \vec{\Omega}(x_m) + \vec{W}(x_m)]_\kappa \tag{157′}$$
$$(\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_0;\quad n_0 + n' + 1,\quad n_0 + n' + 2,\ \ldots,\ n)$$

где $[\quad]_k$ означает κ-тую компоненту вектора, стоящего в квадратных скобках,

$$\mu'^{m'+1}\vec{A}' + \nu'^{m'+1}\vec{B}' + (m'+1)\mu'^{m'+1}\vec{C}' + (m'+1)\nu'^{m'+1}\vec{D}' = \\ = P'\vec{u}'(x_{m+m'-1}) - \vec{F}'(x_{m+m'-1}) + \vec{\Omega}'(x_{m+m'+1}) + \vec{W}'(x_{m+m'-1}). \tag{157″}$$

Известные значения функции u в четырех точках A', A'', B', B'' дают шесть уравнений. Эти уравнения имеют такой вид:

$$[P(\mu^m\vec{A} + \nu^m\vec{B} + m\mu^m\vec{C} + m\nu^m\vec{D})]_\kappa = u_\kappa(x_m) + [P(-\vec{F}(x_m) + \\ + \vec{\Omega}(x_m) + \vec{W}(x_m)]_\kappa \quad (\kappa = n_0 + 1,\quad n_0 + n');$$

$$(P(\mu^{m-1}\vec{A} + \nu^{m-1}\vec{B} + (m-1)\mu^{m-1}\vec{C} + (m-1)\nu^{m-1}\vec{D})]_\kappa = u_\kappa(x_{m-1}) + \\ + [P(-\vec{F}(x_{m-1}) + \vec{\Omega}(x_{m-1}) + \vec{W}(x_{m-1})]_\kappa \\ (\kappa = n_0,\ n_0 + n' + 1); \tag{158′}$$

$$[P'(\mu'^2\vec{A}' + \nu'^2\vec{B}' + 2\mu'^2\vec{C}' + 2\nu'^2\vec{D}')]_\kappa = u'_\kappa(x_m) \quad (\kappa = 1,\ n'). \tag{158″}$$

Краевое условие (125″) на вертикальных отрезках, входящих в состав границы области G (без учета точек A и B, в которых это условие уже использовано), дает $2n - 4$ уравнения. Эти уравнения вместе с уравнениями (157), (157′), (157″), (158), (158′), (158″) составляют систему $4n - 2$ уравнений. Недостающие $4n' - 2$ уравнения, необходимые для определения всех $4n + 4n'$ неизвестных, получаются из условия, что значения функции u, определенные по формуле (140′) и определенные по формуле (140″), должны совпадать в точках подкладки, отмеченных на рис. 7 крестиками, кружочками, треугольниками и жирными точками (без учета уже использованных точек A'' и B''). Решая построенную таким образом систему $4n + 4n'$ уравнений относительно $4n + 4n'$ неизвестных A_κ, B_κ, C_κ, D_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$), A'_κ, B_κ, C'_κ, D'_κ, ($\kappa = 1, 2, \ldots, n'$) и подставляя найденные значения их в формулы (140′) и (140″), получаем в явной форме решение конечноразностной краевой задачи (125), (125′), (125″) для области G, составленной из прямоугольников D_0 и D_0'. Этим самым получаем в явной форме приближенное решение для данной области G бигармонической задачи (121), (121′), (121″), когда на горизонтальных отрезках, входящих в состав границы области G, оператор $NU = \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$.

Допустим теперь, что краевое условие (125″) на горизонтальных отрезках, входящих в состав границы области G, такое, что $N_h u$ частично совпадает с $N_h'' u$, частично — с $N_h' u$, и пусть q — количество точек на указанных отрезках, в которых $N_h u = N_h' u$. В этом случае найденные указанным способом $4n+4n'$ постоянных $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{A}', \vec{B}', \vec{C}', \vec{D}'$ будут зависеть от q неопределенных параметров — предконтурных значений функции u, соответствующих тем точкам на горизонтальных отрезках, в которых $N_h u = N_h' u$. Составляя для этих предконтурных значений соответствующие выражения по формулам (140′), (140″), получаем q линейных алгебраических уравнений для их определения. Таким образом, конечноразностная краевая задача (125), (125′), (125″) для области G (см. рис. 7), эквивалентная системе $n(m-2) + n'(m'-1)$ линейных алгебраических уравнений, сводится в общем случае к решению только $4n + 4n' + q$ $(q \leqslant 2(m-2) + 2(m'-2)$ линейных алгебраических уравнений с $4n + 4n' + q$ неизвестными.

Точно так же при помощи основной формулы суммарных представлений (140) получается резкое снижение количества линейных алгебраических уравнений, подлежащих численному решению в случае конечноразностной краевой задачи (125), (125′), (125″) для любой области G, составленной из нескольких прямоугольников или ограниченной криволинейным контуром. Причем в последнем случае, по аналогии с тем, как это делалось в § 1, следует вписать в область G некоторую область G', составленную из прямоугольников таким образом, чтобы было как можно меньше таких точек, которые принадлежат G, но не принадлежат G' Затем, принимая значения функции u в указанных точках за дополнительные неизвестные, следует воспользоваться для их определения конечноразностным уравнением (125), записанным для указанных точек, принадлежащих G, но не принадлежащих G'.

п. 3. Обобщение основной формулы суммарных представлений. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$LU = \Delta\Delta U - 2a\Delta U - 2\lambda U = f(x, y), \tag{159}$$

где a и λ — вещественные постоянные, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Конечноразностный оператор, соответствующий дифференциальному оператору LU, построенный по 13 точкам прямоугольной равномерной сетки, имеет вид:

$$
L_h u = \frac{1}{h^4}\left|\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & & \gamma^4 & & \\
\hline
 & 2\gamma^2 & \begin{array}{c} -4(1+\gamma^2)\gamma^2 - \\ -2a\gamma^2 h^2 \end{array} & 2\gamma^2 & \\
\hline
1 & \begin{array}{c} -4(1+\gamma^2) - \\ -2ah^2 \end{array} & \begin{array}{c} 6(1+\gamma^4)+8\gamma^2+ \\ +4ah^2(1+\gamma^2) - \\ -2\lambda h^4 \end{array} & \begin{array}{c} -4(1+\gamma^2) - \\ -2ah^2 \end{array} & 1 \\
\hline
 & 2\gamma^2 & \begin{array}{c} -4(1+\gamma^2)\gamma^2 - \\ -2a\gamma^2 h^2 \end{array} & 2\gamma^2 & \\
\hline
 & & \gamma^4 & &
\end{array}\right| u \qquad (160)
$$

При этом для всякой функции $U(x, y)$, имеющей непрерывные производные до шестого порядка, в узлах сетки имеет место равенство

$$L_h U = LU + 0(h^2 + h_1^2). \qquad (161)$$

Для конечноразностного уравнения

$$L_h u = f(x_i, y_\kappa) \quad (i = 2, 3, \ldots, m-1; \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n) \qquad (162)$$

построим формулу, аналогичную формуле (140).

Вводя конечноразностные операторы

$$Ru_\kappa(x) = u_\kappa(x+4h) - [4(1+\gamma^2) + 2ah^2]\, u_\kappa(x+3h) + [6(1+\gamma^2) + 8\gamma^2 + 4ah^2(1+\gamma^2) - 2\lambda h^4]\, u_\kappa(x+2h) - [4(1+\gamma^2) + 2ah^2]\, u_\kappa(x+h) + u_\kappa(x), \qquad (163)$$

$$Qu_\kappa(x) = 2\gamma^2 u_\kappa(x+3h) - [4(1+\gamma^2)\gamma^2 - 2ah^2\gamma^2]\, u_\kappa(x+2h) + 2\gamma^2 u_\kappa(x+h), \qquad (163')$$

можем конечноразностное уравнение (162) записать в виде системы уравнений

$$Ru_\kappa(x) + Q[u_{\kappa-1}(x) + u_{\kappa+1}(x)] + \gamma^4[u_{\kappa-2}(x+2h) + u_{\kappa+2}(x+2h)] = h^4 f_\kappa(x+2h) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \qquad (164)$$

или в векторной форме

$$R\vec{u}(x) + QT\vec{u}(x) + \gamma^4(T^2 - 2E)\vec{u}(x+2h) = h^4\vec{f}(x+2h) - \vec{\omega}(x+2h) - \gamma^4\vec{w}(x+2h), \qquad (164')$$

где E — единичная матрица порядка n, T — матрица, определенная равенством (16), $\vec{\omega}(x+2h)$ — n-мерный вектор (131) при $Qu_\kappa(x)$, определенном равенством (163′), $\vec{w}(x+2h)$ — n-мерный вектор (132).

Пользуясь матрицами P и Λ, определенными равенствами (6), (7), (19) и обозначением (20), уравнение (164′) можем записать в виде

$$R\vec{\hat{u}}(x)+\Lambda Q\vec{\hat{u}}(x)+\gamma^4(\Lambda^2-2E)\vec{\hat{u}}(x+2h)=$$

$$=h^4\vec{\hat{f}}(x+2h)-\vec{\hat{\omega}}(x+2h)-\gamma^4\vec{\hat{w}}(x+2h), \qquad (164'')$$

или в развернутой форме

$$R\hat{u}_\kappa(x)+2\lambda_\kappa Q\hat{u}_\kappa(x)+\gamma^4(4\lambda_\kappa^2-2)\hat{u}_\kappa(x+2h)=$$

$$=h^4\hat{f}_\kappa(x+2h)-\hat{\omega}_\kappa(x+2h)-\gamma^4\hat{w}_\kappa(x+2h)\ (\kappa=1,2,\ldots,n). \qquad (164''')$$

В соответствии с обозначениями (163), (163′), каждое из уравнений (164‴) запишется в виде

$$\hat{u}_\kappa(x+4h)-\hat{u}_\kappa(x+3h)[4(1+\gamma^2)+2ah^2-4\gamma^2\lambda_\kappa]+$$

$$+\hat{u}_\kappa(x+2h)\{6(1+\gamma^4)+8\gamma^2+4ah^2(1+\gamma^2)-2\lambda h^4-\gamma^4(2+4\lambda_\kappa^2)-$$

$$-2\lambda_\kappa[4(1+\gamma^2)\gamma^2+2ah^2\gamma^2]\}-\hat{u}_\kappa(x+h)[4(1+\gamma^2)+2ah^2-$$

$$-4\gamma^2\lambda_\kappa]+\hat{u}_\kappa(x)=h^4\hat{f}_\kappa(x+2h)-\hat{\omega}_\kappa(x+2h)-\gamma^4\hat{w}_\kappa(x+2h),$$

или

$$u_\kappa(x+4h)-(4\eta_\kappa+2ah^2)\hat{u}_\kappa(x+3h)+(4\eta_\kappa^2+4ah^2\eta_\kappa-2\lambda h^4)\hat{u}_\kappa(x+$$

$$+2h)-(4\eta_\kappa+2ah^2)\hat{u}_\kappa(x+h)+\hat{u}_\kappa(x)=\Phi_\kappa(x+2h), \qquad (165)$$

где η_κ — величины, определенные равенствами (134),

$$\Phi_\kappa(x+2h)=h^4\hat{f}_\kappa(x+2h)-\hat{\omega}_\kappa(x+2h)-\gamma^4\hat{w}_\kappa(x+2h). \qquad (165')$$

Полагая

$$a_\kappa=\eta_\kappa+\frac{ah^2}{2}, \quad b=\frac{a^2h^4}{4}+\frac{\lambda h^4}{2}, \qquad (165'')$$

уравнение (165) запишем в виде

$$\hat{u}_\kappa(x+4h)-4a_\kappa\hat{u}_\kappa(x+3h)+(4a_\kappa^2+2-4b)\hat{u}_\kappa(x+2h)-$$

$$-4a_\kappa\hat{u}_\kappa(x+h)+\hat{u}_\kappa(x)=\Phi_\kappa(x+2h). \qquad (165''')$$

Общее решение уравнения (165‴) при нулевой правой части, в соответствии с гл. 1 § 1, (см. формулу (48)), запишется в виде

$$\hat{u}_{\kappa}^{0}(x_i) = A_{\kappa}\varphi_{\kappa}(x_i) + B_{\kappa}\psi_{\kappa}(x_i) + C_{\kappa}\tilde{\varphi}_{\kappa}(x_i) + D_{\kappa}\tilde{\psi}_{\kappa}(x_i)$$
$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m+1), \tag{166}$$

где A_{κ}, B_{κ}, C_{κ}, D_{κ}— произвольные постоянные, $\varphi_{\kappa}(x_i)$, $\psi_{\kappa}(x_i)$, $\tilde{\varphi}_{\kappa}(x_i)$ $\tilde{\psi}_{\kappa}(x_i)$ — функции дискретного аргумента, определенные формулами, указанными в таблице 3.

Таблица 3

	$\varphi_{\kappa}(x_i)$	$\psi_{\kappa}(x_i)$	$\tilde{\varphi}_{\kappa}(x_i)$	$\tilde{\psi}_{\kappa}(x_i)$
а) $b = 0,\ \lvert a_{\kappa}\rvert > 1$	μ_{κ}^{i}	ν_{κ}^{i}	$i\mu_{\kappa}$	$i\nu_{\kappa}^{i}$
б) $b > 0,\ \lvert a - \sqrt{b}\rvert > 1$	μ_{κ}^{i}	ν_{κ}^{i}	$\mu_{\kappa}'^{i}$	$\nu_{\kappa}'^{i}$
в) $b > 0,\ \lvert a - \sqrt{b}\rvert = 1$	μ_{κ}^{i}	ν_{κ}^{i}	$\mu_{\kappa}'^{i}$	$i\mu_{\kappa}'^{i}$
г) $b > 0\ \ \lvert a - \sqrt{b}\rvert < 1$	μ_{κ}^{i}	ν_{κ}^{i}	$\cos i\Theta_{\kappa}'$	$\sin i\Theta_{\kappa}'$
д) $b < 0$	$\varrho_{\kappa}^{i}\cos i\Theta_{\kappa}$	$\varrho_{\kappa}\sin i\Theta_{\kappa}$	$\varrho_{\kappa}'^{i}\cos i\Theta_{\kappa}$	$\varrho_{\kappa}'^{i}\sin i\Theta_{\kappa}$

Здесь в случаях а), б), в)

$$\mu_{\kappa} = a_{\kappa} + \sqrt{b} + \sqrt{(a+\sqrt{b})^2 - 1}, \qquad \nu_{\kappa} = \mu_{\kappa}^{-1},$$
$$\mu_{\kappa}' = a_{\kappa} - \sqrt{b} + \sqrt{(a-\sqrt{b})^2 - 1}, \qquad \nu_{\kappa} = \mu_{\kappa}'^{-1}; \tag{166'}$$

в случае г)

$$\mu_{\kappa} = a_{\kappa} + \sqrt{b} + \sqrt{(a_{\kappa}+\sqrt{b})^2 - 1}, \qquad \nu_{\kappa} = \mu_{\kappa}^{-1}, \tag{166''}$$
$$\Theta_{\kappa} = \arccos\,(a_{\kappa} - \sqrt{b});$$

в случае д)

$$\Theta_{\kappa} = \arcsin\sqrt{\frac{1-a_{\kappa}^2+b}{2}\sqrt{\left(\frac{1-a_{\kappa}+b}{2}\right)^2 - b}}, \tag{166'''}$$

$$\varrho_{\kappa} = \frac{a_{\kappa}}{\cos\Theta_{\kappa}} + \frac{\sqrt{-b}}{\sin\Theta_{\kappa}}, \quad \varrho_{\kappa} = \frac{a}{\cos\Theta_{\kappa}} - \frac{\sqrt{b}}{\sin\Theta_{\kappa}}.$$

Частное решение уравнения (165‴), обращающееся в нуль при $i = 0;\ 1;\ 2;\ 3$, находится методом вариации постоянных в виде

$$\hat{u}^{*}_{\kappa}(x_i) = \sum_{p=2}^{p=i-2} \frac{Q^{(\kappa)}_{ip}}{Q^{(\kappa)}_{p}} \Phi_\kappa(x_p), \tag{167}$$

где последняя сумма считается равной нулю при $i = 0;\ 1;\ 2;\ 3$,

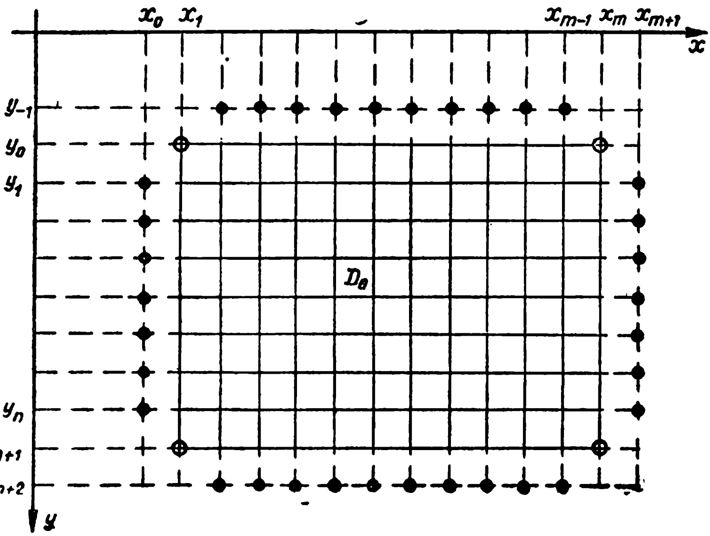

Рис. 6.

$$Q^{(\kappa)}_{ip} = \begin{vmatrix} \varphi_\kappa(x_{p-1}) & \psi_\kappa(x_{p-1}) & \tilde{\varphi}_\kappa(x_{p-1}) & \tilde{\psi}_\kappa(x_{p-1}) \\ \varphi_\kappa(x_p) & \psi_\kappa(x_p) & \tilde{\varphi}_\kappa(x_p) & \tilde{\psi}_\kappa(x_p) \\ \varphi_\kappa(x_{p+1}) & \psi_\kappa(x_{p+1}) & \tilde{\varphi}(x_{p+1}) & \tilde{\psi}_\kappa(x_{p+1}) \\ \varphi_\kappa(x_i) & \psi_\kappa(x_i) & \tilde{\varphi}_\kappa(x_i) & \tilde{\psi}_\kappa(x_i) \end{vmatrix} \tag{167'}$$

$$Q^{(\kappa)}_{p} = \begin{vmatrix} \varphi_\kappa(x_{p-1}) & \psi_\kappa(x_{p-1}) & \tilde{\varphi}_\kappa(x_{p-1}) & \tilde{\psi}_\kappa(x_{p-1}) \\ \varphi_\kappa(x_p) & \psi_\kappa(x_p) & \tilde{\varphi}_\kappa(x_p) & \tilde{\psi}_\kappa(x_p) \\ \varphi_\kappa(x_{p+1}) & \psi_\kappa(x_{p+1}) & \tilde{\varphi}_\kappa(x_{p+1}) & \tilde{\psi}_\kappa(x_{p+1}) \\ \varphi_\kappa(x_{p+2}) & \psi_\kappa(x_{p+2}) & \tilde{\varphi}_\kappa(x_{p+2}) & \tilde{\psi}_\kappa(x_{p+2}) \end{vmatrix} \tag{167''}$$

Общее решение уравнения (165''') или, что все равно, уравнения (164''') запишется в виде

$$\hat{u}_\kappa(x_i) = A_\kappa \varphi_\kappa(x_i) + B_\kappa \psi_\kappa(x_i) + C_\kappa \tilde{\varphi}_\kappa(x_i) + D_\kappa \tilde{\psi}_\kappa(x_i) + $$
$$+ \sum_{p=2}^{p=i-2} \frac{Q_{ip}^{(\kappa)}}{Q_p^{(\kappa)}} [h^4 \hat{f}_\kappa(x_p) - \hat{\omega}_\kappa(x_p) - \gamma^4 \hat{w}_\kappa(x_p)]. \qquad (168)$$

Вводя n-мерные векторы произвольных постоянных (137) и диагональные матрицы порядка n

$$\begin{aligned} \Phi(x_i) &= [\varphi_1(x_i), \quad \varphi_2(x_i), \ \ldots, \ \varphi_n(x_i)], \\ \Psi(x_i) &= [\psi_1(x_i), \quad \psi_2(x_i), \ \ldots, \ \psi_n(x_i)], \\ \tilde{\Phi}(x_i) &= [\tilde{\varphi}_1(x_i), \quad \tilde{\varphi}_2(x_i), \ \ldots, \ \tilde{\varphi}_n(x_i)], \\ \tilde{\Psi}(x_i) &= [\tilde{\psi}_1(x_i), \quad \tilde{\psi}_2(x_i), \ \ldots, \ \tilde{\psi}_n(x_i)], \end{aligned} \qquad (169)$$

$$G(i, p) = \left[\frac{Q_{ip}^{(1)}}{Q_p^{(1)}}, \quad \frac{Q_{ip}^{(2)}}{Q_p^{(2)}}, \ \ldots, \ \frac{Q_{ip}^{(n)}}{Q_p^{(n)}} \right], \qquad (170)$$

можем общее решение уравнения (164'') записать в виде

$$\vec{\hat{u}}(x_i) = \Phi(x_i)\vec{A} + \Psi(x_i)\vec{B} + \tilde{\Phi}(x_i)\vec{C} + \tilde{\Psi}(x_i)\vec{D} + $$
$$+ \sum_{p=2}^{p=i-2} G(i, p) P [h^4 \vec{f}(x_p) - \vec{\omega}(x_p) - \vec{w}(x_p)]$$
$$(i = 0, 1, \ldots, m+1). \qquad (171)$$

Умножая обе части этого равенства на P, получаем следующую формулу суммарных представлений для конечноразностного уравнения (162):

$$\vec{u}(x_i) = P\Phi(x_i)\vec{A} + P\Psi(x_i)\vec{B} + P\tilde{\Phi}(x_i)\vec{C} + P\tilde{\Psi}(x_i)\vec{D} + $$
$$+ \sum_{p=2}^{p=i-2} PG(i, p) P [h^4 \vec{f}(x_p) - \vec{\omega}(x_p) - \vec{w}(x_p)]$$
$$(i = 0, 1, \ldots, m+1), \qquad (172)$$

где последняя сумма равна нулю при $i = 0;\ 1;\ 2;\ 3$.

Отметим, что диагональная матрица $G(i, p)$ (170) после несложных преобразований приводится к довольно простому виду. Так, например, в случае а) (см. таблицу 3)

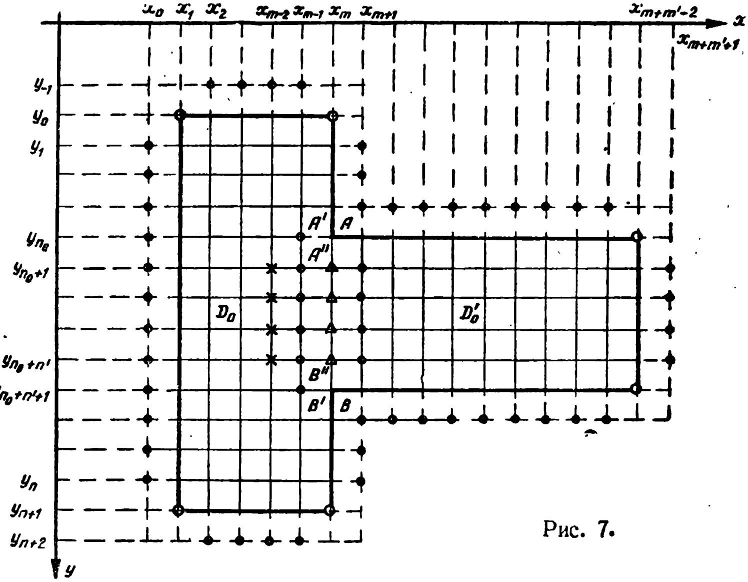

Рис. 7.

$$G(i,\ p) =$$

$$= \left[\frac{(i-p-1)\left(\mu_\kappa^{i-p+1}-\nu_\kappa^{i-p+1}\right)-(i-p+1)\left(\mu_\kappa^{i-p-1}-\nu_\kappa^{i-p-1}\right)}{(\mu_\kappa-\nu_\kappa)^3}\right]_{\kappa=1}^{\kappa=n}, \quad (170')$$

в случае б)

$$G(i,\ p) = \left[\frac{\mu_\kappa^{i-p+1}}{(\mu_\kappa-\nu_\kappa)\left(\mu_\kappa-\mu_\kappa'\right)\left(\mu_\kappa-\nu_\kappa'\right)} + \frac{\nu_\kappa^{i-p+1}}{(\nu_\kappa-\mu_\kappa)\left(\nu_\kappa-\mu_\kappa'\right)\left(\nu_\kappa-\nu_\kappa'\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_\kappa'^{\,i-p+1}}{\left(\mu_\kappa'-\mu_\kappa\right)\left(\mu_\kappa'-\nu_\kappa\right)\left(\mu_\kappa'-\nu_\kappa'\right)} + \frac{\nu_\kappa'^{\,i-p+1}}{\left(\nu_\kappa'-\mu_\kappa\right)\left(\nu_\kappa'-\nu_\kappa\right)\left(\nu_\kappa'-\mu_\kappa'\right)}\right]_{\kappa=1}^{\kappa=n}, \quad (170'')$$

в случае в)

$$G(i,p) = \left[\frac{\mu_\kappa^{i-p+1}}{(\mu_\kappa-\nu_\kappa)(\mu_\kappa-\mu_\kappa')^2} + \frac{\nu_\kappa^{i-p+1}}{(\nu_\kappa-\mu_\kappa)(\nu_\kappa-\mu_\kappa')^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_\kappa'^{\,i-p+1}\left(\mu_\kappa+\nu_\kappa-2\mu_\kappa'\right)}{\left(\mu_\kappa'-\mu_\kappa\right)^2\left(\mu_\kappa'-\nu_\kappa\right)^2} + \frac{(i-p+1)\,\mu_\kappa'^{\,i-p+1}}{\mu_\kappa'\left(\mu_\kappa'-\mu_\kappa\right)\left(\nu_\kappa'-\nu_\kappa\right)}\right|_{\kappa=1}^{\kappa=n}. \quad (170''')$$

Формула (172) играет по отношению к уравнению (159) точно такую же роль, как формула (140) по отношению к бигармоническому уравнению (121).

З а м е ч а н и е 1. Результат, полученный здесь в применении к дифференциальному уравнению (159), без существенных изменений переносится на дифференциальные уравнения вида

$$L^*U = LU + L^0U = f(x,\ y), \tag{173}$$

где $f(x,\ y)$ — заданная функция от x и y, LU — дифференциальный оператор уравнения (159), а $L^\circ U$ — любой дифференциальный оператор не выше четвертого порядка с постоянными коэффициентами, такой, что соответствующий ему конечно-разностный оператор $L_h^0 u$, построенный по тем же узлам, что и $L_h u$, или по части их, симметричен по y. Отличие здесь будет только в том, что корни характеристического уравнения μ_k, ν_k, μ_k', ν_k' должны будут определяться как корни алгебраического уравнения четвертой степени, коэффициенты которого могут оказаться несимметричными.

Так, например, это имеет место для дифференциального уравнения

$$L^*U = LU + L^0U = \Delta\Delta U - 2a\,\Delta U - 2\lambda U - 2b\,\frac{\partial}{\partial x}\Delta U = f(x,\ y), \tag{174}$$

$$L_h^0 u = b\frac{1}{h^3}\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline & -\gamma^2 & & \gamma^2 & \\ \hline -1 & 2(1+\gamma^2) & & -2(1+\gamma^2) & 1 \\ \hline & -\gamma^2 & & \gamma^2 & \\ \hline & & & & \end{array}\right| u \tag{174'}$$

где a, b, λ—вещественные постоянные, для которого и в узлах сетки для всякой функции, имеющей непрерывные производные до шестого порядка, имеет место равенство

$$L_h^*U = L^*U + 0(h^2 + h_1^2). \tag{174''}$$

З а м е ч а н и е 2. Формулы суммарных представлений, аналогичные формулами (140) и (172), можно получить, используя вместо матриц T, P и Λ матрицы T_3, P_3 и Λ_3, определенные равенствами (110), (111) и (110'). Это же самое можно сделать, по аналогии с § 2, п. 5, для рассмотренных здесь уравнений не только в случае двумерном, но и в трехмерном случае.

§ 3. ФОРМУЛЫ СУММАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

п. 1. Уравнения с двумя независимыми переменными. Рассмотрим краевую задачу

$$Lv = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\lambda v - \frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial x} = f(x,\ y)\ \ (a^2 = \text{const} > 0), \tag{175}$$

$$v|_{x=x_0} = \beta(y), \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_{n+1}, \tag{175'}$$

$$v|_{y=y_0} = \beta_1(x), \quad v|_{y=y_{n+1}} = \beta_2(x), \quad x > x_0 = \text{const}, \tag{175''}$$

где $\lambda^2 = \text{const} \geqslant 0$, $f(x, y)$, $\beta(y)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$— заданные функции своих аргументов, v—неизвестная функция в полуполосе $y_0 \leqslant y \leqslant y_{n+1}$, $x > x_0$.

Пусть, как и раньше, h — шаг сетки по x, h_1 — шаг сетки по y, $x_i = x_0 + ih$, $y_к = y_0 + кh_1$ $(i, к = 0; \pm 1 \ldots)$

Заменяя дифференциальное уравнение (175) конечноразностным уравнением, будем говорить об экстраполяционной аппроксимации оператора Lu, если

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_i} \approx \frac{v|_{x_{i+1}} - v|_{x_i}}{h}, \tag{176}$$

и будем говорить об интерполяционной аппроксимации оператора Lu, если

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_i} \approx \frac{v|_{x_{i-1}} - v|_{x_i}}{h}. \tag{176'}$$

Пользуясь формулой численного дифференцирования

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y} \approx \frac{v(x, y+h) - 2v(x, y) + v(x, y-h)}{h_1^2}$$

и полагая

$$\frac{ha^2}{h_1^2} = r, \tag{177}$$

в качестве экстраполяционной аппроксимации оператора Lu получаем конечноразностный оператор

$$L_h u = \frac{u(x, y+h_1) - 2u(x, y) + u(x, y-h_1)}{h_1^2} - 2\lambda u(x, y) - \\ - \frac{1}{r} \frac{u(x_1+h, y) - u(x, y)}{h_1^2}. \tag{178}$$

В качестве интерполяционной аппроксимации оператора Lu получаем конечноразностный оператор

$$L'_h u = \frac{u(x, y+h_1) - 2u(x, y) + u(x, y-h_1)}{h_1^2} - 2\lambda u(x, y) - \\ - \frac{1}{r} \cdot \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h_1^2}. \tag{179}$$

Легко заметить, что для всякой функции $v(x, y)$, имеющей непрерывные производные до четвертого порядка, в узлах сетки имеют место равенства

$$L_h v = Lv + 0\left(h_1^2\right), \quad L'_h v = Lv + 0\left(h_1^2\right). \tag{180}$$

Отметим, что записанные в виде шаблонов операторы $L_h u$ и $L'_h u$ будут иметь такой вид:

$$
L_h u = \frac{1}{h_1^2} \left| \begin{array}{c|c|c} \hline & 1 & \\ \hline & -2-2\lambda h_1^2+\dfrac{1}{r} & -\dfrac{1}{r} \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \right| u, \qquad (178')
$$

$$
L'_h u = \frac{1}{h_1^2} \left| \begin{array}{c|c|c} \hline & 1 & \\ \hline \dfrac{1}{r} & -2-2\lambda h_1^2-\dfrac{1}{r} & \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \right| u. \qquad (179')
$$

В силу равенств (180) приближенное решение краевой задачи (175), (175′), (175″) можем искать как решение конечноразностной задачи

$$
L_h u = f(x_i,\ y_\kappa) \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots;\ \kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (181)
$$

$$
u(x_0,\ y_\kappa) = \beta(y_\kappa) \quad (\kappa = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1), \qquad (181')
$$

$$
u(x_i,\ y_0) = \beta_1(x_i), \quad u(x_i,\ y_{n+1}) = \beta_2(x_i), \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (181'')
$$

или как решение конечноразностной задачи вида

$$
L'_h u = f(x_i,\ y_\kappa) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots;\ \kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (182)
$$

$$
u(x_0,\ y_\kappa) = \beta(y_\kappa) \quad (\kappa = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1), \qquad (182')
$$

$$
u(x_i,\ y_0) = \beta_1(x_i), \quad u(x_i,\ y_{n+1}) = \beta_2(x_i) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (182'')
$$

Задачу (181), (181′), (181″) будем называть экстраполяционной конечноразностной задачей, соответствующей задаче (175), (175′), (175″), а задачу (182), (182′), (182″) — интерполяционной конечноразностной задачей, соответствующей той же задаче (175), (175′), (175″).

Экстраполяционная задача (181), (181′), (181″) допускает так называемую явную схему решения, т. е., отправляясь от начальных краевых условий, мы можем путем последовательного счета по шагам найти решение в любой интересующей нас точке. Однако задача (181), (181′), (181″) несколько хуже задачи (182), (182′), (182″) в том отношении, что здесь для обеспечения устойчивости счета по шагам необходимо, чтобы параметр r был достаточно малой постоянной величиной (например, достаточно, чтобы $2r + |1 - 2r(1+\lambda_1^2)| \leqslant 1$).

Построим формулы суммарных представлений как для экстраполяционной задачи (181), (181′), (181″), так и для интерполяционной задачи (182), (182′), (182″).

Будем пользоваться обозначениями

$$u_\kappa(x) = u(x,\ y_\kappa),\quad f_\kappa(x) = f(x,\ y_\kappa)\quad (\kappa = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1)$$

и n-мерными векторами

$$\vec{u}(x) = (u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x)), \tag{183}$$

$$\vec{f}(x) = (f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)), \tag{183'}$$

$$\vec{\omega}(x) = (u_0(x),\ 0,\ \ldots,\ 0,\ u_{n+1}(x)). \tag{183''}$$

Рассмотрим вначале экстраполяционную задачу (181), (181'), (181'') .

Введя разностный оператор

$$Ru_\kappa(x) = -u_\kappa(x+h) + (1 - 2r - 2r\lambda h_1^2)\,u_\kappa(x), \tag{184}$$

уравнение (181) можем записать в виде системы уравнений

$$Ru_\kappa(x) + r\,[u_{\kappa-1}(x) + u_{\kappa+1}(x)] = rh_1^2 f_\kappa(x)\quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{184'}$$

или и в векторной форме

$$R\vec{u}(x) + rT\vec{u}(x) = rh_1^2\vec{f}(x) - r\vec{\omega}(x), \tag{185}$$

где T — матрица порядка n, определенная равенством (16). Пользуясь теперь матрицами P и Λ, определенными равенствами (7), (6), (19) и обозначением (20), уравнение (185) можем записать в виде

$$R\vec{\hat{u}}(x) + r\Lambda\vec{\hat{u}}_\kappa(x) = rh_1^2\vec{\hat{f}}_\kappa(x) - r\vec{\hat{\omega}}_\kappa(x), \tag{185'}$$

или в развернутой форме

$$R\hat{u}_\kappa(x) + 2r\lambda_\kappa\hat{u}_\kappa(x) = rh_1^2\hat{f}_\kappa(x) - r\hat{\omega}_\kappa(x)\quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{185''}$$

Каждое из уравнений (185'') в силу (184) запишется в виде

$$\hat{u}_\kappa(x+h) - (1 - 2r - 2r\lambda h_1^2 + 2r\lambda_\kappa)\,\hat{u}_\kappa(x) = \\ = -rh_1^2\hat{f}_\kappa(x) + r\hat{\omega}_\kappa(x). \tag{186}$$

Полагая

$$\mu_\kappa = 1 - 2r(1 + \lambda h_1^2 - \lambda_\kappa), \tag{186'}$$

общее решение уравнения (186) можем записать в виде

$$\hat{u}_\kappa(x_i) = A_\kappa\mu_\kappa^i + \sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_\kappa^{i-p-1}[-rh_1^2\hat{f}_\kappa(x_p) + r\hat{\omega}_\kappa(x_p)]\quad (i = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{187}$$

где A_κ— произвольная постоянная; последняя сумма правой части равенства считается равной нулю при $i = 0$.

Пользуясь диагональной матрицей

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n] \tag{187'}$$

и вектором произвольных постоянных

$$\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n), \tag{187''}$$

можем записать общее решение векторного уравнения (185′) в следующем виде:

$$\vec{\hat{u}}(x_i) = \mu^i\vec{A} + \sum_{p=0}^{p=i-1} \mu^{i-p-1}[-rh_1^2\vec{\hat{f}}(x_p) + r\vec{\hat{\omega}}(x_p)] \quad (i=0, 1, \ldots). \tag{187'''}$$

Взяв от обеих частей этого равенства P-трансформацию, т. е. умножая обе части этого равенства на P, получаем формулу суммарных представлений для экстраполяционной задачи (181), (181′), (181″)

$$\vec{u}(x_i) = P\mu^i\vec{A} + \sum_{p=0}^{p=i-1} P\mu^{i-p-1}P[-rh_1^2\vec{f}(x_p) + r\vec{\omega}(x_p)] \quad (i = 0, 1, \ldots), \tag{188}$$

где последняя сумма правой части равенства считается равной нулю при $i = 0$.

Перейдем теперь к рассмотрению интерполяционной задачи (182), (182′), (182″).

Полагая

$$Ru_\kappa(x) = -(1 + 2r + 2r\lambda h_1^2)u_\kappa(x) + u_\kappa(x-h), \tag{189}$$

можем уравнение (182) записать в виде

$$R\vec{u}(x) + rT\vec{u}(x) = rh_1^2\vec{f}(x) - r\vec{\omega}(x) \tag{189'}$$

и вместо (186) получим

$$-(1 + 2r + 2r\lambda h_1^2 - 2r\lambda_\kappa)\hat{u}_\kappa(x) + \hat{u}_\kappa(x-h) = rh_1^2\hat{f}_\kappa(x) - \\ - r\hat{\omega}_\kappa(x) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{190}$$

или

$$\hat{u}_\kappa(x+h) - \mu_\kappa\hat{u}_\kappa(x) = -r\mu_\kappa h_1^2\hat{f}_\kappa(x+h) + r\mu_\kappa\hat{\omega}_\kappa(x+h) \\ (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{190'}$$

где

$$\mu_\kappa = [1 + 2r(1 + \lambda h_1^2 - \lambda_\kappa)]^{-1} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n). \tag{190''}$$

Общее решение уравнения (190') запишется в виде

$$\hat{u}_\kappa(x_i) = A_\kappa \mu_\kappa^i + \sum_{p=0}^{p=i-1} \mu_\kappa^{i-p}[-rh_1^2 \hat{f}_\kappa(x_{p+1}) + r\hat{\omega}_\kappa(x_{p+1})] \quad (i = 0, 1, \ldots), \tag{191}$$

где A_κ — произвольная постоянная; последняя сумма правой части равенства считается равной нулю при $i = 0$. Пользуясь матрицей (187') при условии, что μ $(\kappa = 1,2, \ldots, n)$ определены равенствами (190'') и вектором произвольных постоянных (187''), можем написать

$$\vec{\hat{u}}(x_i) = \mu^i \vec{A} + \sum_{p=0}^{p=i-1} \mu^{i-p}[-rh_1^2 \vec{\hat{f}}(x_{p+1}) + r\vec{\hat{\omega}}(x_{p+1})] \; (i=0, 1, \ldots). \tag{191'}$$

Умножая обе части этого равенства на P, получаем формулу суммарных представлений, соответствующую интерполяционному оператору $L_h' u$,

$$\vec{u}(x_i) = P\mu^i \vec{A} + \sum_{p=0}^{p=i-1} P\mu^{i-p}P[-rh_1^2 \vec{\hat{f}}(x_{p+1}) + r\vec{\omega}(x_{p+1})] \; (i = 0, 1, \ldots), \tag{192}$$

где последняя сумма правой части равенства считается равной нулю при $i = 0$.

Формулы (188) и (192) дают в явной форме решение экстраполяционной и соответственно интерполяционной задач, соответствующих краевой задаче (175), (175'), (175''). Для этого достаточно только в эти формулы вместо вектора $\vec{A}$ подставить известный вектор, определяющийся начальными условиями задачи

$$\vec{A} = P\vec{u}(x_0). \tag{193}$$

Эти же формулы, по аналогии с тем, как это делалось для эллиптических дифференциальных уравнений, можно использовать при решении краевых задач для уравнения (175), при начальном условии (175'), а также в том случае, когда краевые условия того или иного типа при $x > x_0$ задаются на кривых, выходящих из точек (x_0, y_0) и (x_0, y_{n+1}), лежащих, соответственно, выше прямой $y = y_0$ и ниже прямой $y = y_{n+1}$ (см. рис. 1).

Построим теперь формулы суммарных представлений применительно к краевой задаче следующего вида:

$$Lv = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\lambda v - \frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial x} = f(x, y) \quad (\lambda^2, \; a^2 = \mathrm{const} > 0), \tag{175}$$

$$v|_{x=x_0} = \beta(y), \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_n, \tag{194}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa v\right)_{y=y_1} = \beta_1(x), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa_1 v\right)_{y=y_n} = \beta_2(x), \quad x > x_0, \tag{194'}$$

где $\beta(y)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ — заданные функции своих аргументов, κ, κ_1 — неотрицательные постоянные, v — неизвестная функция в полуполосе $y_1 \leqslant y \leqslant y_n$, $x \geqslant x_0$ (см. рис. 1),

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{y=y_1} = -\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y_1}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{y=y_n} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y_n}.$$

Введем обозначения

$$\operatorname{tg}\alpha = 1 - \kappa h_1, \quad \operatorname{tg}\beta = 1 - \kappa_1 h_1. \tag{195}$$

Экстраполяционная конечноразностная задача, соответствующая задаче (175), (194), (194′), будет иметь вид

$$L_h u = f(x_i, y_\kappa) \quad (i = 0, 1, \ldots; \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{196}$$

$$u_\kappa(x_0) = \beta(y_\kappa) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{196′}$$

$$u_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x_i) = h_1\beta_1(x_i), \; u_{n+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta u_n(x_i) = h_1\beta_2(x_i). \tag{196″}$$

Интерполяционная задача, соответствующая задаче (175), (194), (194′), имеет вид

$$L'_h u = f(x_i, y_\kappa) \quad (i = 1, 2, \ldots; \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{197}$$

$$u_\kappa(x_0) = \beta(y_\kappa) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{197′}$$

$$\begin{gathered} u_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x_i) = h_1\beta_1(x_i), \quad u_{n+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta u_n(x_i) = \\ = h_1\beta_2(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{197″}$$

Введем n-мерный вектор

$$\vec{\omega}_3(x_i) = (u_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x_i), \quad 0, \ldots, 0, \; u_{n+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta u_n(x_i)) \tag{198}$$

и будем пользоваться матрицами T_3, P_3, Λ_3, определенными равенствами (110), (111), (110′).

В случае интерполяционной задачи уравнения (184′) можем записать в векторной форме

$$R\vec{u}(x) + rT_3\vec{u}(x) = rh_1^2\vec{f}(x) - r\vec{\omega}_3(x). \tag{199}$$

Пользуясь P^*-трансформацией, т. е. полагая

$$\vec{\hat{u}}(x) = P_3^*\vec{u}(x) = (\hat{u}_1(x), \hat{u}_2(x), \ldots, \hat{u}_n(x)), \tag{199′}$$

имеем

$$R\vec{\hat{u}}(x) + r\Lambda_3\vec{\hat{u}}(x) = rh_1^2\vec{\hat{f}}(x) - r\vec{\hat{\omega}}_3(x), \tag{200}$$

или в развернутой форме

$$\hat{u}_\kappa(x) + 2r\lambda_\kappa\hat{u}_\kappa(x) = rh_1^2\hat{f}_\kappa(x) - r\vec{\omega}_{3\kappa}(x) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n). \tag{200′}$$

Учитывая (184), каждое из уравнений (200′) можем записать в виде

$$\hat{u}_\kappa(x+h)-(1-2r-2r\lambda h_1^2+2r\lambda_\kappa)\hat{u}_\kappa(x)=-rh_1^2\hat{f}_\kappa(x)+r\hat{\omega}_{3\kappa}(x). \tag{200″}$$

Пользуясь обозначениями (186′), (187′), (187″) при условии, что λ_κ $(\kappa=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ определяются равенствами (110″), (110‴), находим общее решение уравнения (200″) в виде

$$\hat{u}_\kappa(x_i)=A_\kappa\mu_\kappa^i+\sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_\kappa^{i-p-1}[-rh_1^2\hat{f}_\kappa(x_p)+r\hat{\omega}_{3\kappa}(x_p)] \tag{201}$$

и общее решение векторного уравнения (200) — в виде

$$\vec{\hat{u}}(x_i)=\mu^i\vec{A}+\sum_{p=0}^{p=i-1}\mu^{i-p-1}[-rh_1^2\vec{\hat{f}}(x_p)+r\vec{\hat{\omega}}_3(x_p)]. \tag{201′}$$

Умножая обе части этого равенства на матрицу P_3, получаем формулу суммарных представлений, соответствующую экстраполяционному оператору L_hu, в виде

$$\vec{u}(x_i)=P_3\mu^i\vec{A}+\sum_{p=0}^{p=i-1}P_3\mu^{i-p-1}P_3^*[-rh_1^2\vec{f}(x_p)+r\vec{\omega}_3(x_p)]\ (i=0,\ 1,\ \dots), \tag{202}$$

где последняя сумма правой части равенства считается равной нулю при $i=0$.

Точно таким же способом получаем формулу суммарных представлений, соответствующую интерполяционному оператору L_hu:

$$\vec{u}(x_i)=P_3\mu^i\vec{A}+\sum_{p=0}^{p=i-1}P_3\mu^{i-p}P_3^*[-rh_1^2\vec{f}(x_{p+1})+r\vec{\omega}(x_{p+1})]$$

$$(i=0,\ 1,\ \dots), \tag{203}$$

где последняя сумма правой части равенства считается равной нулю при $i=0$, а в матрице μ, определенной равенством (187′), в отличие от формулы (202) величины μ_κ $(\kappa=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ определяются при тех же значениях $\lambda_\kappa(\kappa=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ не равенствами (186′), а равенствами (190″).

п. 2. Уравнения с тремя независимыми переменными. Рассмотрим краевую задачу

$$Lv=\Delta v-2\lambda v-\frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial x}=f(x,\ y,\ z)$$

$$\left(a^2=\text{const}>0,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \tag{204}$$

$$v|_{x=x_0}=\beta(y,\ z),\quad y_0\leqslant y\leqslant y_{n+1},\quad z_0\leqslant z\leqslant z_{l+1}, \tag{204′}$$

$$v|_{y=y_0}=\beta_1(x,\ z),\ v|_{y=y_{n+1}}=\beta_2(x,\ z),\ x>x_0,\quad z_0\leqslant z\leqslant z_{l+1}, \tag{204″}$$

$$v|_{z=z_0}=\beta_3(x,\ y),\ v|_{z=z_{l+1}}=\beta_4(x,\ y),\ x>x_0,\quad z_0\leqslant z\leqslant z_{l+1}, \tag{204‴}$$

це $\lambda^2 = \mathrm{const} > 0$, $\beta(y, z)$, $\beta_1(x, z)$, $\beta_2(x, z)$, $\beta_3(x, y)$, $\beta_4(x, y)$ — заданные функции своих аргументов (см. рис. 4).

Пусть h, h_1, h_2 — шаги сетки по x, y и, соответственно по z, $x_i = x_0 + ih$, $y_k = y_0 + kh_1$, $z_j = z_0 + jh_2$ $(i,\ k,\ j = 0, \pm 1, \ldots)$ (см. рис. 4)

$$\frac{ha^2}{h_1^2} = r, \quad \frac{h_1}{h_2} = \gamma. \tag{205}$$

Конечноразностный экстраполяционный оператор $L_h u$, соответствующий оператору Lv, можно записать в виде шаблона:

$$L_h u\Big|_{x,\,y,\,z} = \frac{1}{h_1^2}\left\{ \left\| \begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline \gamma^2 & -2(1 + \gamma^2 + \lambda h_1^2) & \gamma^2 \\ \hline & 1 & \end{array} \right\| u - \frac{1}{r}\,[u(x + h, y, z) - u(x, y, z)] \right\}. \tag{206}$$

Конечноразностный интерполяционный оператор $L'_h u$, соответствующий оператору Lv, можно записать в виде

$$L'_h u\Big|_{x,\,y,\,z} = \frac{1}{h_1^2}\left\{ \left\| \begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline \gamma^2 & -2(1 + \gamma^2 + \lambda h_1^2) & \gamma^2 \\ \hline & 1 & \end{array} \right\| - \frac{1}{r}\,[u(x, y, z) - u(x - h, y, z)] \right\}. \tag{207}$$

При этом для всякой функции $v(x, y, z)$, имеющей непрерывные оизводные по y и z до четвертого порядка и по x — до второго рядка, имеют место равенства

$$L_h v = Lv + O(h_1^2); \quad L'_h v = Lv + O(h_1^2). \tag{208}$$

Будем пользоваться обозначениями (52), (53), (54), (55), (53'), 4'), (55').

В силу краевых условий (204″), (204‴) можем сказать, что n-мерные векторы

$$\vec{\omega}_j(x_i) = (u_{0j}(x_i),\ 0,\ \ldots,\ 0,\ u_{n+j}(x_i)) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l), \tag{55}$$

$$\vec{u}_0(x_i) = (u_{10}(x_i),\ u_{20}(x_i),\ \ldots,\ u_{n0}(x_i)), \tag{209}$$

$$\vec{u}_{l+1}(x_i) = (u_{1l+1}(x_i),\ (u_{2l+1}(x_i),\ \ldots,\ u_{nl+1}(x_i))$$

будут известными.

В качестве неизвестных будут элементы $(n,\ l)$-матрицы (53′), которые необходимо определить либо из уравнения

$$L_h u = f(x_i,\ y_\kappa,\ z_j) \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots;\ \ \kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l), \tag{210}$$

либо из уравнения

$$L'_h u = f(x_i,\ y_\kappa,\ z_j) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots;\ \ \kappa = 1,\ 2,\ \ldots;\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l). \tag{211}$$

Рассмотрим для определенности экстраполяционное уравнение (210).

Вводя конечноразностный оператор

$$Ru_{\kappa j}(x_i) = -u_{\kappa j}(x_i + h) + [1 - 2r(1 + \gamma^2 + \lambda h_1^2)]\,u_{\kappa j}(x_i), \tag{212}$$

уравнение (210) можем записать в виде nl уравнений

$$Ru_{\kappa j}(x_i) + r[u_{\kappa-1j}(x_i) + u_{\kappa+1j}(x_i)] + r\gamma^2[u_{\kappa j-1}(x_i) + u_{\kappa j+1}(x_i)] = rh_1^2 f_{\kappa j}(x_i) \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l) \tag{212′}$$

или в виде l векторных равенств

$$R\vec{u}_j(x_i) + rT\vec{u}_j(x_i) + r\gamma^2[\vec{u}_{j-1}(x_i) + \vec{u}_{j+1}(x_i)] = rh_1^2\vec{f}_j(x_i) - r\vec{\omega}_j(x_i) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l), \tag{213}$$

где T — матрица порядка n, определенная равенством (16).

Пользуясь матрицами P и Λ, определенными равенствами (7), (6), (19) и обозначением (20), уравнение (213) можем записать в виде

$$R\hat{\vec{u}}_j(x_i) + r\Lambda\hat{\vec{u}}_j(x_i) + r\gamma^2[\hat{\vec{u}}_{j-1}(x_i) + \hat{\vec{u}}_{j+1}(x_i)] = rh_1^2\hat{\vec{f}}(x_i) - r\hat{\vec{\omega}}_j(x_i) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l) \tag{213′}$$

или в виде n систем (при $\kappa = 1,\ 2, \ldots,\ n$) уравнений вида

$$R\hat{u}_{\kappa j}(x_i) + 2r\lambda_\kappa\hat{u}_{\kappa j}(x_i) + r\gamma^2[\hat{u}_{\kappa j-1}(x_i) + \hat{u}_{\kappa j+1}(x_i)] = rh_1^2\hat{f}_{\kappa j}(x_i) - r\hat{\omega}_{\kappa j}(x_i) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l). \tag{213″}$$

Введем теперь вместо l неизвестных n-мерных векторов

$$\vec{\hat{u}}_j(x_i) = P\vec{\hat{u}}_j(x_i) = (\hat{u}_{1j}(x_i),\ \hat{u}_{2j}(x_i),\ \dots,\ \hat{u}_{nj}(x_i)) \quad (j = 1,\ 2,\ \dots,\ l) \tag{62}$$

n новых l-мерных векторов

$$\vec{v}_\kappa(x_i) = (\hat{u}_{\kappa 1}(x_i),\ \hat{u}_{\kappa 2}(x_i),\ \dots,\ \hat{u}_{\kappa l}(x_i)) \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{63}$$

Очевидно, что $(n,\ l)$-матрица

$$\hat{U}(x_i) = [\vec{\hat{u}}_1(x_i),\ \vec{\hat{u}}_2(x_i),\ \dots,\ \vec{\hat{u}}_l(x_i)] \tag{62'}$$

и $(l,\ n)$-матрица

$$\hat{V}(x_i) = [\vec{v}_1(x_i),\ \vec{v}_2(x_i),\ \dots,\ \vec{v}_n(x_i)] \tag{63'}$$

являются транспонированными по отношению друг к другу.

Пользуясь обозначениями (64), (64′), (64″), каждую из n систем уравнений (213″) можем записать в виде векторного равенства

$$R\vec{v}_\kappa(x_i) + 2r\lambda_\kappa\vec{v}_\kappa(x_i) + r\gamma^2T'\vec{v}_\kappa(x_i) = rh_1^2\vec{F}_\kappa(x_i) - r\vec{w}_\kappa(x_i) - $$

$$- r\gamma^2\vec{g}_\kappa(x_i) \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \dots,\ n), \tag{214}$$

где T' — матрица порядка l, определенная равенством (65′).

Пользуясь матрицами P' и Λ', определенными равенствами (65″) и (65‴) и обозначениями (66), уравнения (214) можем записать в виде

$$R\vec{\hat{v}}_\kappa(x_i) + 2r\lambda_\kappa\vec{\hat{v}}_\kappa(x_i) + r\gamma^2\Lambda'\vec{\hat{v}}_\kappa(x_i) = rh_1^2\vec{\hat{F}}_\kappa(x_i) - r\vec{\hat{w}}_\kappa(x_i) - $$

$$- r\gamma^2\vec{g}_\kappa(x_i) \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{214'}$$

Каждое из векторных равенств (214′) запишется в виде l скалярных уравнений

$$R\hat{v}_{\kappa j}(x_i) + 2r(\lambda_\kappa + \gamma^2\lambda_j')\hat{v}_{\kappa j}(x_i) = rh_1^2\hat{F}_{\kappa j}(x_i) - r\hat{w}_{\kappa j}(x_i) - $$

$$- r\gamma^2\hat{g}_{\kappa j}(x_i) \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ l) \tag{215}$$

или, в соответствии с (212),

$$- \hat{v}_{\kappa j}(x_i + h) + \mu_{\kappa j}\hat{v}_{\kappa j}(x_i) = rh_1^2\hat{F}_{\kappa j}(x_i) - r\hat{w}_{\kappa j}(x_i) - $$

$$- r\gamma^2\hat{g}_{\kappa j}(x_i) \quad (j = 1,\ 2,\ \dots,\ l), \tag{215'}$$

где

$$\mu_{\kappa j} = 1 - 2r(1 + \gamma^2 + \lambda h_1^2 - \lambda_\kappa - \gamma^2\lambda_j'). \tag{215''}$$

Общее решение каждого из уравнений (215') запишется в виде

$$\widehat{v}_{\kappa j}(x_i) = A_{\kappa j}\mu_{\kappa j}^{i} + \sum_{p=0}^{p=i-1} \mu_{\kappa j}^{i-p-1}[-rh_1^2\widehat{F}_{\kappa j}(x_p) + r\widehat{w}_{\kappa j}(x_p) +$$

$$+ r\gamma^2\widehat{g}_{\kappa j}(x_p)] \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,), \tag{216}$$

где $A_{\kappa j}$ — произвольная постоянная; последняя сумма правой части равенства считается равной нулю при $i = 0$.

Общее решение системы l уравнений (215), или, что все равно, каждого из векторных уравнений (214'), запишется в виде

$$\vec{\widehat{v}}_{\kappa}(x_i) = \vec{A}'_{\kappa}(x_i) + \vec{\Omega}'_{\kappa}(x_i) \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{217}$$

где $\vec{A}'_{\kappa}(x_i)$ и $\vec{\Omega}'_{\kappa}(x_i)$ — l = мерные векторы

$$\vec{A}'_{\kappa}(x_i) = (A_{\kappa 1}\mu_{\kappa 1}^{i},\quad A_{\kappa 2}\mu_{\kappa 2}^{i},\ \ldots,\quad A_{\kappa l}\mu_{\kappa l}^{i}), \tag{217'}$$

$$\vec{\Omega}'_{\kappa}(x_i) = \sum_{p=0}^{p=i-1} \mu_{\kappa}^{i-p-1} P'[-rh_1^2\vec{F}_{\kappa}(x_p) + r\vec{w}_{\kappa}(x_p) + r\gamma^2 g_{\kappa}(x_p)],$$

$$\vec{\Omega}_{\kappa}(x_0) = 0, \tag{217''}$$

μ_{κ} — диагональная матрица порядка l

$$\mu_{\kappa} = [\mu_{\kappa 1},\ \mu_{\kappa 2},\ \ldots,\ \mu_{\kappa l}]. \tag{217'''}$$

Общее решение n векторных уравнений (214) запишется в виде

$$\vec{v}_{\kappa} = P'[\vec{A}'_{\kappa}(x_i) + \vec{\Omega}'_{\kappa}(x_i)] \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{218}$$

или в матричной форме

$$V(x_i) = P'[A'(x_i) + \Omega'(x_i)], \tag{218'}$$

где $A'(x_i)$ и $\Omega'(x_i)$ — прямоугольные $(l,\ n)$-матрицы

$$A'(x_i) = [\vec{A}'_1(x_i),\ \vec{A}'_2(x_i),\ \ldots,\ \vec{A}'_n(x_i)], \tag{218''}$$

$$\Omega'(x_i) = [\vec{\Omega}'_1(x_i),\ \vec{\Omega}'_2(x_i),\ \ldots,\ \vec{\Omega}'_n(x_i)]. \tag{218'''}$$

Транспонируя обе части равенства (218'), получаем равенство для $(n,\ l)$-матрицы

$$\widehat{U}(x_i) = [A(x_i) + \Omega(x_i)]P', \tag{219}$$

где $A(x_i)$, $\Omega(x_i)$ — (n, l) — матрицы, транспонированные с $A'(x_i)$, $\Omega'(x_i)$, причем

$$A(x_i) = \begin{vmatrix} A_{11}\mu_{11}^{i} & A_{12}\mu_{12}^{i} & \dots & A_{1l}\mu_{1l}^{i} \\ A_{21}\mu_{21}^{i} & A_{22}\mu_{22}^{i} & \dots & A_{2l}\mu_{2l}^{i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}\mu_{n1}^{i} & A_{n2}\mu_{n2}^{i} & \dots & A_{nl}\mu_{nl}^{i} \end{vmatrix} \qquad (219')$$

$$\Omega(x_i) = \begin{vmatrix} \sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_{11}^{i-p-1}\widehat{\Phi}_{11}(x_p) & \sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_{12}^{i-p-1}\widehat{\Phi}_{12}(x_p) & \dots & \sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_{1l}^{i-p-1}\widehat{\Phi}_{1l}(x_p) \\ \sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_{21}^{i-p-1}\widehat{\Phi}_{21}(x_p) & \sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_{22}^{i-p-1}\widehat{\Phi}_{22}(x_p) & \dots & \sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_{2l}^{i-p-1}\widehat{\Phi}_{2l}(x_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_{n1}^{i-p-1}\widehat{\Phi}_{n1}(x_p) & \sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_{n2}^{i-p-1}\widehat{\Phi}_{n2}(x_p) & \dots & \sum_{p=0}^{p=i-1}\mu_{nl}^{i-p-1}\widehat{\Phi}_{nl}(x_p) \end{vmatrix} \qquad (219'')$$

$$\Omega(x_0) = 0,$$

где

$$\vec{\widehat{\Phi}}_\kappa(x_i) = (\widehat{\Phi}_{\kappa 1}(x_i), \widehat{\Phi}_{\kappa 2}(x_i), \dots, \widehat{\Phi}_{\kappa l}(x_i)) = P'[-rh_1^2\vec{F}_\kappa(x_i) + + r\vec{w}_\kappa(x_i) + r\gamma^2\vec{g}_\kappa(x_i)] \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n). \qquad (219''')$$

Умножая обе части равенства (219) на P, получаем формулу суммарных представлений, соответствующую экстраполяционному уравнению (210),

$$U(x_i) = P[A(x_i) + \Omega(x_i)]P' \quad (i = 0, 1, \dots). \qquad (220)$$

Рассуждая точно так же, но только подставляя в уравнение (214') вместо оператора (212) оператор, определенный равенством

$$RU_{\kappa j}(x_i) = -[1 + 2r(1 + \gamma^2 + \lambda h_1^2)]u_{\kappa j}(x_i) + u_{\kappa j}(x_i - h),$$

получаем формулу суммарных представлений, соответствующую интерполяционному уравнению (211), в виде

$$U(x_i) = P[A(x_i) + \Omega(x_i)]P', \qquad (221)$$

где $U(x_i)$ —(l,n)-матрица (53'), а P и P' — те же матрицы, что и в (220), $A(x_i)$—(l, n)-матрица, в которой $\mu_{\kappa j}$ определяются равенствами

$$\mu_{\kappa j} = [1 + 2r(1 + \gamma^2 + \lambda h_1^2 - \lambda_\kappa - \gamma^2\lambda_j']^{-1} \qquad (221')$$
$$(\kappa = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, l)$$

(λ_κ и λ_j' — то же, что и в (220)), $\Omega(x_i)$—(l, n)— матрица, определенная равенством (219'') при условии (221') и при условии, что $\widehat{\Phi}_{\kappa j}(x_p)$

заменены выражениями $\mu_{\kappa j}\ \widehat{\Phi}_{\kappa j}(x_{p+1})$, где $\widehat{\Phi}_{\kappa j}\ (x_j)$, как и для случая формулы (220), определены равенствами (219'').

При помощи формул (220) и (221) можно сразу же получить в явном виде решение экстраполяционной и, соответственно, интерполяционной конечноразностных краевых задач, соответствующих краевой задаче для полубесконечного параллелепипеда (204), (204'), (204''), (204'''). В каждом из этих случаев достаточно только считать, что постоянные $A_{\kappa j}$ ($\kappa = 1,2,\ldots, n$; $j = 1,2,\ldots, l$) в этих формулах являются элементами известной $(l,\ n)$-матрицы

$$A(x_0) = PU(x_0)\,P' \tag{222}$$

По аналогии с тем, как это делалось нами для конечноразностных уравнений, соответствующих эллиптическим дифференциальным уравнениям, формулы (220) и (221) могут быть использованы для резкого снижения количества линейных алгебраических уравнений, подлежащих численному решению в том случае, когда краевая задача для уравнения (204) ставится для трехмерных областей с границей довольно общей структуры и при краевых условиях всевозможных типов

Отметим, что если вместо матриц T, P, Λ и T', P', Λ' воспользоваться матрицами T_3, P_3, Λ_3, определенными равенствами (110), (111), (110'), и матрицами T_3', P_3', Δ_3 точно такого же вида, но только порядка не n а l, то в качестве обобщения формул (220) и (221) получаются, соответственно, формулы следующего вида:

$$U(x_i) = P_3[A(x_i) + \Omega(x_i)]\,P_3'^{*} \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{220'}$$

$$U(x_i) = P_3[A(x_i) + \Omega(x_i)]\,P_3'^{*} \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{221'}$$

причем $A\ (x_i)$ и $\Omega\ (x_i)$ в равенствах (220'), (221'), соответственно, то же, что и в формулах (220) и (221), с тем отличием, что в равенствах (219''') вместо P' должно быть $P_3'^{*}$, а l-мерные векторы $\vec{F}_\kappa\ (x_i)$, $\vec{w}_\kappa\ (x_i)$, $\vec{g}_\kappa\ (x_i)$ вместо (64), (64'), (64'') определяются равенствами

$$\begin{gathered}\vec{F}_\kappa(x_i) = (\widehat{f}_{\kappa 1}(x_i),\quad \widehat{f}_{\kappa 2}(x_i),\ \ldots,\ \widehat{f}_{\kappa l}(x_i)),\\ \vec{w}_\kappa(x_i) = (\widehat{\omega}_{\kappa 1}(x_i),\quad \widehat{\omega}_{\kappa 2}(x_i),\ \ldots,\ \widehat{\omega}_{\kappa l}(x_i)),\\ \vec{g}_\kappa(x_i) = (\widehat{u}_{\kappa 0}(x_i) - \operatorname{tg}\alpha'\widehat{u}_{\kappa 1}(x_i)\ \ 0,\ \ldots,\ 0,\ \widehat{u}_{\kappa l+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta'\widehat{u}_{\kappa l}(x_i))\end{gathered} \tag{223}$$

при условии, что

$$\begin{gathered}\vec{\widehat{f}}_j(x_i) = (\widehat{f}_{1i}(x_i),\ \widehat{f}_{2i}(x_i),\ \ldots,\ \widehat{f}_{ni}(x_i)) = P_3^{*}\vec{f}_j(x_i),\\ \vec{\widehat{\omega}}_j(x_i) = P_3^{*}\vec{\omega}_j(x_i) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l),\end{gathered} \tag{224}$$

где $\vec{\omega}_j(x_i)$—n-мерные векторы

$$\vec{\omega}_j(x_i) = (u_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x_i),\ 0,\ \ldots,\ 0\ u_{n+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta\, u_n(x_i)) \tag{225}$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l).$$

Формулы (220') и (221') дают в явном виде решение экстраполяционной и интерполяционной конечноразностных задач, соответствующих краевой задаче для дифференциального уравнения (204) при начальном условии

$$v|_{x=x_0} = \beta(y,\ z),\quad y_1 \leqslant y \leqslant y_n,\quad z_1 \leqslant z \leqslant z_l \tag{226}$$

и при краевых условиях

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa v\right)_{y=y_1} = \beta_1(x,\ z),\quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa_1 v\right)_{y=y_n} =$$
$$= \beta_2(x,\ z),\ x > x_0\quad z_1 \leqslant z \leqslant z_l, \tag{226'}$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \tau v\right)_{z=z_1} = \beta_3(x,\ y),\quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \tau_1 v\right)_{z=z_l} =$$
$$= \beta_4(x,\ y),\quad x > x_0,\quad y_1 \leqslant y \leqslant y_n, \tag{226''}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе области, κ, κ_1, τ, τ_1 — неотрицательные постоянные, причем

$$1 - \kappa h_1 = \operatorname{tg}\alpha,\quad 1 - \kappa_1 h_1 = \operatorname{tg}\beta,\quad 1 - \tau h_2 = \operatorname{tg}\alpha',$$
$$1 - \tau_1 h_2 = \operatorname{tg}\beta'. \tag{226'''}$$

§ 4. РЕШЕНИЕ КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

п. 1. Уравнение гиперболического типа с двумя независимыми переменными. Рассмотрим краевую задачу

$$Lv = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\lambda v - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x,\ y)\quad (a^2 = \mathrm{const} > 0), \tag{227}$$

$$v|_{x=x_1} = \beta(y),\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \beta_1(y),\quad y_0 \leqslant y \leqslant y_{n+1}, \tag{227'}$$

$$v|_{y=y_0} = \beta_2(x),\quad v|_{y=y_{n+1}} = \beta_3(x),\quad x > x_1, \tag{227''}$$

где $\lambda^2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, $f(x,\ y)$, $\beta(y)$, $\beta_1(y)$, $\beta_2(x)$, $\beta_3(x)$ — заданные функции своих аргументов, v — неизвестная функция в полуполосе $y_0 \leqslant y \leqslant y_{n+1}$, $x > x_1$ (см. рис. 1).

Пусть, как и ранее, h — шаг сетки по x, h_1 — шаг сетки по y, $x_i = x_0 + ih$, $y_\kappa = y_0 + \kappa h_1$ ($i,\ \kappa = 0,\ \pm 1,\ \ldots$).

Конечноразностный оператор $L_h u$, соответствующий оператору Lv, можно представить в виде шаблона

$$L_h u \Big|_{x,\,y} = \frac{1}{h_1^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline -\dfrac{1}{r} & -2\left(1 - \dfrac{1}{r} + \lambda h_1^2\right) & -\dfrac{1}{r} \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \; u(x, y), \tag{228}$$

где

$$r = \frac{a^2 h^2}{h_1^2}. \tag{228'}$$

Рассмотрим конечноразностное уравнение

$$L_h u = f(x_i, y_\kappa) \quad (i = 0, 1, \ldots; \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n). \tag{229}$$

Пользуясь оператором

$$Ru_\kappa(x_i) = -u_\kappa(x_i + 2h) + 2(1 - r - r\lambda h_1^2)\, u_\kappa(x_i + h) - u_\kappa(x_i), \tag{230}$$

уравнение (229) можем записать в виде системы n уравнений

$$Ru_\kappa(x_i) + r\,[u_{\kappa-1}(x_i + h) + u_{\kappa+1}(x_i + h)] =$$
$$= rh_1^2 f_\kappa(x_i + h) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n). \tag{230'}$$

Будем пользоваться матрицами T, Λ и P, определенными равенствами (16), (7), (6), (19) и обозначениями (20), (183), (183'), (183'').

При указанных обозначениях система уравнений (230') запишется в виде векторного уравнения

$$R\vec{u}(x_i) + rT\vec{u}(x_i + h) = rh_1^2 \vec{f}(x_i + h) - r\vec{\omega}(x_i + h). \tag{231}$$

или

$$R\hat{\vec{u}}(x_i) + r\Lambda\hat{\vec{u}}(x_i + h) = rh_1^2 \hat{\vec{f}}(x_i + h) - r\hat{\vec{\omega}}(x_i + h). \tag{231'}$$

Последнее уравнение эквивалентно системе n уравнений.

$$R\hat{u}_\kappa(x_i) + 2r\lambda_\kappa \hat{u}(x_i + h) = rh_1^2 \hat{f}_\kappa(x_i + h) - r\hat{\omega}_\kappa(x_i + h)$$
$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n) \tag{232}$$

или, в силу (230),

$$\hat{u}_\kappa(x_i + 2h) - 2\,[1 - r(1 + \lambda h_1^2 - \lambda_\kappa)]\, \hat{u}_\kappa(x_i + h) + \hat{u}_\kappa(x_i) =$$
$$= -rh_1^2 \hat{f}_\kappa(x_i + h) + r\hat{\omega}_\kappa(x_i + h) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n). \tag{232'}$$

Полагая

$$\eta_\kappa = 1 - r(1 + \lambda h_1^2 - \lambda_\kappa) \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{233}$$

для корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению (232′), имеем

$$\mu_\kappa = \eta_\kappa + \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1}, \quad \nu_\kappa = \eta_\kappa - \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1} \tag{234}$$

Поэтому, в соответствии с гл 1, § 1, общее решение каждого из уравнений (233) запишется в виде

$$\hat{u}_\kappa(x_i) = A_\kappa\varphi_\kappa(x_i) + B_\kappa\psi_\kappa(x_i) + \Omega_\kappa(x_i) \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{235}$$

где A_κ, B_κ — произвольные постоянные

$$\Omega_\kappa(x_i) = \sum_{p=1}^{p=i-1} G_\kappa(i-p)\left[-rh_1^2\hat{f}_\kappa(x_p) + r\hat{\omega}_\kappa(x_p)\right], \tag{235′}$$

$$\Omega_\kappa(x_0) = \Omega_\kappa(x_1) = 0,$$

а $\varphi_\kappa(x_i)$, $\psi_\kappa(x_i)$, $G_\kappa(i)$ определяются в зависимости от η_κ формулами, указанными в таблице 4.

Таблица 4

	$\varphi_\kappa(x_i)$	$\psi_\kappa(x_i)$	$G_\kappa(i)$	
$\lvert\eta_\kappa\rvert > 1$	μ_κ^i	ν_κ^i	$(\mu_\kappa^i - \nu_\kappa^i)(\mu_\kappa - \nu_\kappa)^{-1}$	$\mu_\kappa = \eta_\kappa + \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1}$
$\lvert\eta_\kappa\rvert = 0$	μ_κ^i	$i\mu_\kappa^i$	$i\mu_\kappa^{i-1}$	$\nu_\kappa = \eta_\kappa - \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1}$
$\lvert\eta_\kappa\rvert < 1$	$\cos i\Theta_\kappa$	$\sin i\Theta_\kappa$	$\sin i\Theta_\kappa(\sin\Theta_\kappa)^{-1}$	$\Theta_\kappa = \arccos\eta_\kappa$

Пользуясь n-мерными векторами произвольных постоянных

$$\vec{A} = (A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n),\ \vec{B} = (B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n), \tag{236}$$

диагональными матрицами порядка n

$$\begin{aligned} \Phi(x_i) &= [\varphi_1(x_i),\ \varphi_2(x_i),\ \ldots,\ \varphi_n(x_i)], \\ \Psi(x_i) &= [\psi_1(x_i),\ \psi_2(x_i),\ \ldots,\ \psi_n(x_i)], \end{aligned} \tag{236′}$$

и n-мерным вектором

$$\vec{\Omega}(x_i) = (\Omega_1(x_i),\ \Omega_2(x_i),\ \ldots,\ \Omega_n(x_i)), \tag{236″}$$

общее решение векторного уравнения (231′) можем записать в виде

$$\vec{\hat{u}}(x_i) = \Phi(x_i)\vec{A} + \Psi(x_i)\vec{B} + \vec{\Omega}(x_i). \tag{237}$$

Умножая обе части этого равенства на P, получаем формулу суммарных представлений в виде

$$\vec{u}(x_i) = P\Phi(x_i)\vec{A} + P\Psi(x_i)\vec{B} + P\vec{\Omega}(x_i),$$
$$\vec{\Omega}(x_0) = \vec{\Omega}(x_1) = 0 \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{238}$$

Формула (238) сразу же позволяет записать в явном виде решение конечноразностной задачи, соответствующей краевой задаче (227), (227′), (227″).

В самом деле, в силу краевых условий (227″) вектор $\vec{\Omega}(x_i)$ будет известным. Из начальных условий (227′) следует, что векторы

$$\vec{u}(x_1), \quad \vec{u}(x_2) - \vec{u}(x_0) \tag{239}$$

известны. Учитывая это, при помощи формулы (238) получаем уравнения для определения $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\vec{u}(x_1) = P\Phi(x_1)\vec{A} + P\Psi(x_1)\vec{B},$$
$$P[\Phi(x_2)\vec{A} + \Psi(x_2)\vec{B} + \vec{\Omega}(x_2)] -$$
$$- P[\Phi(x)\vec{A} + \Psi(x_0)\vec{B}] = \vec{u}(x_2) - \vec{u}(x_0)$$

или

$$\Phi(x_1)\vec{A} + \Psi(x_1)\vec{B} = \vec{\hat{u}}(x_1), \tag{239′}$$
$$(\Phi(x_2) - \Phi(x_0))\vec{A} + (\Psi(x_2) - \Psi(x_0))\vec{B} = \vec{\hat{u}}(x_2) - \vec{\hat{u}}(x_0) - \vec{\Omega}(x_2).$$

Определяя отсюда $\vec{A}$ и $\vec{B}$ и подставляя в формулу (238), получаем в явной форме решение конечноразностной задачи, соответствующей краевой задаче (227), (227′), (227″), а следовательно, и приближенное решение этой краевой задачи.

Формулу (238), по аналогии с тем, как это нами делалось в случае эллиптических дифференциальных уравнений, можно использовать для решения краевых задач для уравнения (227) при начальных условиях (227), а также в том случае, когда краевые условия какого-либо типа при x x_1 задаются на кривых, выходящих из точек (x_1, y_0) и (x_1, y_{n+1}), лежащих, соответственно, выше прямой $y = y_0$ и ниже прямой $y = y_{n+1}$ (см. рис. 1).

Построим теперь формулу суммарных представлений применительно к краевой задаче для уравнения (227) при следующих начальных и краевых условиях:

$$v|_{x=x_1} = \beta(y), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \beta_1(y), \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_n, \tag{240}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa v\right)_{y=y_1} = \beta_2(x), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa_1 v\right)_{y=y_n} = \beta_3(x), \quad (x > x_1), \tag{240'}$$

где $\beta(y)$, $\beta_1(y)$, $\beta_2(x)$, $\beta_3(x)$ — заданные функции своих аргументов, κ, κ_1 — неотрицательные постоянные, v — неизвестная функция в полуполосе $y_1 \leqslant y \leqslant y_n$; $x > x_1$ (см. рис. 1)

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{y=y_1} = -\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y_1}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{y=y_n} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y_n}.$$

Вводя обозначения

$$\operatorname{tg}\alpha = 1 - \kappa h_1, \quad \operatorname{tg}\beta = 1 - \kappa_1 h_1, \tag{195}$$

можем конечноразностную краевую задачу, соответствующую задаче (227), (240), (240′), записать в виде

$$L_h u = f(x_i, y_\kappa) \; (i = 1, 2, \ldots; \; i_\kappa = 1, 2, \ldots; \; \kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{241}$$

$$u_\kappa(x_1) = \beta(y_\kappa), \quad u_\kappa(x_2) - u_\kappa(x_0) = 2h\beta_1(y_\kappa) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \tag{241'}$$

$$u_0(x_i) - \operatorname{tg}\alpha\, u_1(x_i) = h_1\beta_2(x_i), \quad u_{n+1}(x_i) - \operatorname{tg}\beta u_n(x_i) = h_1\beta_3(x_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots). \tag{241''}$$

Пользуясь n-мерным вектором $\vec{\omega}_3(x_i)$, определенным равенством (198), а также матрицами T_3, P_3, Λ_3, определенными равенствами (110), (111), (110′), по аналогии с (231) можем записать уравнение (241) в векторной форме:

$$R\vec{u}(x_i) + rT_3\vec{u}(x_i + h) = rh_1^2\vec{f}(x_i + h) - r\vec{\omega}_3(x_i + h), \tag{242}$$

где $Ru_\kappa(x_i)$ — разностный оператор, определенный равенством (230). Пользуясь обозначением

$$\vec{\hat{u}}(x_i) = P_3^{*}\vec{u}(x_i), \tag{242'}$$

уравнение (242) можем записать в виде

$$R\vec{\hat{u}}_\kappa(x_i) + r\Lambda_3\vec{\hat{u}}(x_i + h) = rh_1^2\vec{\hat{f}}(x_i + h) - r\vec{\hat{\omega}}_3(x_i + h). \tag{242''}$$

Далее, поступая с уравнением (242″) так же, как мы поступали ранее с уравнением (231′), получаем формулу суммарных представлений в виде

$$\vec{u}(x_i) = P_3\Phi(x_i)\vec{A} + P_3\Psi(x_i)\vec{B} + P_3\vec{\Omega}(x_i), \tag{243}$$
$$\vec{\Omega}(x_0) = \vec{\Omega}(x_1) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots),$$

где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ — то же, что и в (238), $\Phi(x_i)$ и $\Psi(x_i)$ — то же, что и в (238), но при условии, что в формуле (233) λ_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$) — элементы матрицы Λ_3 (а не Λ), $\vec{\Omega}(x_i)$ определяются равенством (236″) при условии, что при обозначении (242′)

$$\Omega_\kappa(x_i) = \sum_{p=1}^{p=i-1} G_\kappa(i-p)\left[-rh_1^2\hat{f}_\kappa(x_p) + r\hat{\omega}_{3\kappa}(x_p)\right], \qquad (243')$$

$$\Omega_\kappa(x_0) = \Omega_\kappa(x_1) = 0.$$

Здесь $G_\kappa(x_i)$ — величины, определенные в таблице 4 при условии, что λ_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$) — элементы матрицы Λ_3.

Отметим, что если ввести диагональную матрицу n-го порядка

$$G(i) = [G_1(i), \quad G_2(i), \ \ldots \ , G_n(i)], \qquad (243'')$$

то вектор $\vec{\Omega}(x_i)$ определится равенством

$$\vec{\Omega}(x_i) = \sum_{p=1}^{p=i-1} G(i-p)\, P_3^*\left[-rh_1^2\vec{f}(x_p) + r\vec{\omega}_3(x_p)\right],$$

$$\vec{\Omega}(x_0) = \vec{\Omega}(x_1) = 0. \qquad (243''')$$

Чтобы получить решение конечноразностной задачи (241), (241′), (241″) в явном виде, достаточно только $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в формуле (243) определить из уравнений

$$\Phi(x_1)\vec{A} + \Psi(x_1)\vec{B} = P_3^*\vec{u}(x_1), \qquad (244)$$

$$(\Phi(x_2) - \Phi(x_0))\vec{A} + (\Psi(x_2) - \Psi(x_0))\vec{B} = P_3^*[\vec{u}(x_2) - \vec{u}(x_0)] - \vec{\Omega}(x_2).$$

п. 2. **Гиперболические уравнения с тремя независимыми переменными.** Рассмотрим краевую задачу

$$Lv = \Delta v - 2\lambda v - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, y, z)$$
$$\left(a^2 = \mathrm{const} > 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \qquad (245)$$

$$v|_{x=x_1} = \beta(y, z), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \beta'(y, z), \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_{n+1},$$
$$z_0 \leqslant z \leqslant z_{l+1}, \qquad (245')$$

$$v|_{y=y_0} = \beta_1(x, z), \quad v|_{y=y_{n+1}} = \beta_1'(x, z), \quad x > x_1, \quad z_0 \leqslant z \leqslant z_{l+1}, \qquad (245'')$$

$$v|_{z=z_0} = \beta_2(x, y), \quad v|_{z=z_{l+1}} = \beta_2'(x, y), \quad x > x_1, \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_{n+1}, \qquad (245''')$$

где $\lambda^2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, $\beta(y, z)$, $\beta'(y, z)$, $\beta_1(x, z)$, $\beta_1'(x, z)$, $\beta_2(x, y)$, $\beta_2'(x, y)$ — заданные функции своих аргументов (см. рис. 4).

Пусть h, h_1, h_2 — шаги сетки по x, y и z, соответственно, $x_i = x_0 + ih$, $y_\kappa = y_0 + \kappa h_1$, $z_j = z_0 + jh_2$ (i, κ, $j = 0, \pm 1, \ldots$),

$$r = \frac{a^2h^2}{h_1^2}, \quad \frac{h_1}{h_2} = \gamma. \tag{246}$$

Конечноразностный оператор $L_h u$, соответствующий оператору Lv, представляется в виде шаблона

$$L_h u \Big|_{x,y,z} = \frac{1}{h_1^2} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline \gamma^2 & -2 \quad 1 + \gamma^2 + \lambda h_1^2 - \dfrac{1}{r} & \gamma^2 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}\; u - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} [u(x+h, y, z) + u(x-h, y, z)] \right\}. \tag{247}$$

Будем пользоваться обозначениями (52), (53), (54), (55), (53'), (54'), (55').

В силу краевых условий (245''), (245''') можем считать, что n-мерные векторы (55), (209) (см. п. 1) известны.

В качестве неизвестных будут элементы (n, l)-матрицы (53'), которые необходимо определить из уравнения

$$L_h u = f(x_i, y_\kappa, z_j) \tag{248}$$

$$(i = 1, 2, \ldots; \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots l).$$

Вводя конечноразностный оператор

$$Ru_{\kappa j}(x_i) = -u_{\kappa j}(x_i + 2h) + 2[1 - r(1 + \gamma^2 + \lambda h_1^2)] u_{\kappa j}(x_i + h) - $$
$$- u_{\kappa j}(x_i), \tag{249}$$

уравнение (248) можем записать в виде системы nl уравнений

$$Ru_{\kappa j}(x_i) + r[u_{\kappa-1 j}(x_i + h) + u_{\kappa+1 j}(x_i + h)] +$$
$$+ r\gamma^2 [u_{\kappa j-1}(x_i + h) + u_{\kappa j+1}(x_i + h)] = rh_1^2 f_{\kappa j}(x_i + h) \tag{250}$$
$$(\kappa = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, l).$$

Поступая с уравнениями (250) точно так же, как мы поступали с уравнениями (212'), получим вместо (215) и систем уравнений вида

$$\hat{R v}_{\kappa j}(x_i) + 2r(\lambda_\kappa + \gamma^2\lambda_j')\hat{v}_{\kappa j}(x_i + h) =$$

$$= rh_1^2\hat{F}_{\kappa j}(x_i + h) - r\hat{\omega}_{\kappa j}(x_i + h) - r\gamma^2\hat{g}_{\kappa j}(x_i + h) \qquad (251)$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad \kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Учитывая (249), каждую из систем уравнений (251) запишем в виде

$$\hat{v}_{\kappa j}(x_i + 2h) - 2[1 - r(1 + \gamma^2 + \lambda h_1^2 - \lambda_\kappa - \gamma^2\lambda_j']\hat{v}_{\kappa j}(x_i + h) +$$

$$+ \hat{v}_{\kappa j}(x_i) = -rh_1^2\hat{F}_{\kappa j}(x_i + h) + r\hat{\omega}_{\kappa j}(x_i + h) + r\gamma^2\hat{g}_{\kappa j}(x_i + h) \qquad (251')$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l).$$

Полагая

$$\eta_{\kappa j} = 1 - r(1 + \gamma^2 + \lambda h_1^2 - \lambda_\kappa - \gamma^2\lambda_j') \qquad (252)$$

$$(\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

общее решение каждого из уравнений (251'), по аналогии с (232'), получаем в виде

$$\hat{v}_{\kappa j}(x_i) = A_{\kappa j}\varphi_{\kappa j}(x_i) + B_{\kappa j}\psi_{\kappa j}(x_i) + \Omega_{\kappa j}(x_i) \qquad (253)$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots),$$

где $A_{\kappa i}$, $B_{\kappa i}$ — произвольные постоянные,

$$\Omega_{\kappa j}(x_i) = \sum_{p=1}^{p=i-1} G_{\kappa j}(i - p)[-rh_1^2\hat{F}_{\kappa j}(x_p) + r\hat{\omega}_{\kappa j}(x_p) + r\hat{g}_{\kappa j}(x_p)], \qquad (253')$$

$$\Omega_{\kappa j}(x_0) = \Omega_{\kappa j}(x_1) = 0,$$

а $\varphi_{\kappa j}(x_i)$, $\psi_{\kappa i}(x_i)$ и определяются в зависимости от $\eta_{\kappa j}$ формулами, указанными в таблице 5.

Таблица 5

	$\varphi_{\kappa j}(x_i)$	$\psi_{\kappa j}(x_i)$	$G_{\kappa j}(i)$	
$\lvert\eta_{\kappa j}\rvert > 1$	$\mu^i_{\kappa j}$	$\nu^i_{\kappa j}$	$(\mu^i_{\kappa j} - \nu^i_{\kappa j})(\mu_{\kappa j} - \nu_{\kappa j})^{-1}$	$\mu_{\kappa j} = \eta_{\kappa j} + \sqrt{\eta^2_{\kappa j} - 1}$
$\lvert\eta_{\kappa j}\rvert = 0$	$\mu^i_{\kappa i}$	$i\mu^i_{\kappa j}$	$i\mu^{i-1}_{\kappa j}$	$\nu_{\kappa j} = \eta_{\kappa j} - \sqrt{\eta^2_{\kappa j} - 1}$
$\eta_{\kappa j} < 1$	$\cos\Theta_{\kappa j}$	$\sin i\Theta_{\kappa j}$	$\sin i\Theta_{\kappa j}(\sin\Theta_{\kappa j})^{-1}$	$\Theta_{\kappa j} = \arccos\eta_{\kappa j}$

Общее решение системы уравнений (251′) запишется в виде

$$\vec{\hat{v}}_\kappa(x_i) = \vec{A}'_\kappa(x_i) + \vec{B}'_\kappa(x_i) + \vec{\Omega}'_\kappa(x_i) \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{254}$$

где $\vec{A}'_\kappa(x_i)$, $\vec{B}'_\kappa(x_i)$ — l-мерные векторы, определенные равенствами (70),

$$\vec{\Omega}'_\kappa(x_i) = \sum_{p=1}^{p=i-1} G_\kappa(i-p)\,P\,[-rh_1^2\vec{F}_\kappa(x_p) + r\vec{w}_\kappa(x_p) + r\gamma^2\vec{g}_\kappa(x_p)], \tag{254′}$$

$$\vec{\Omega}'_\kappa(x_0) = \vec{\Omega}_\kappa(x_1) = 0,$$

$G_\kappa(i)$ — диагональная матрица порядка l,

$$G_\kappa(i) = [G_{\kappa 1}(i),\ G_{\kappa 2}(i),\ \ldots,\ G_{\kappa l}(i)]. \tag{254″}$$

Далее, поступая с равенствами (254) при $\kappa = 1, 2, \ldots, n$ точно так же, как мы поступали с равенствами (71), получаем формулу суммарных представлений в виде

$$U(x_i) = P\,[A(x_i) + B(x_i) + \Omega(x_i)]\,P' \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{255}$$

где P и P' — то же, что и в (81), (n, l)-матрицы $A(x_i)$, $B(x_i)$, $\Omega(x_i)$ определяются равенствами (77), (78), (79), (79′) при условии, что

$$\vec{\hat{\Phi}}_\kappa(x_i) = (\hat{\Phi}_{\kappa j}(x_i),\ \hat{\Phi}_{\kappa 1}(x_i),\ \ldots,\ \hat{\Phi}_{\kappa l}(x_i)) = P'\,[-rh_1\vec{F}_\kappa(x_i) + r\vec{w}_\kappa(x_i) + r\gamma^2\vec{g}_\kappa(x_i)] \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{255′}$$

$\vec{F}_\kappa(x_i)$, $\vec{W}_\kappa(x_i)$, $\vec{g}_\kappa(x_i)$ определяются равенствами (64), (64′), (64″).

При помощи формулы (255) можно сразу же получить в явном виде решение конечноразностной задачи, соответствующей краевой задаче для полубесконечного параллелепипеда (245), (245′), (245″), (245‴).

В самом деле, в силу краевых условий (245″), (245‴) матрица $\Omega(x_i)$ будет известной. В силу начальных условий (245′) будут известны матрицы

$$U(x_1) \quad \text{и} \quad U(x_2) - U(x_0).$$

Учитывая это, для определения постоянных $A_{\kappa j}$, $B_{\kappa j}$ получаем матричные равенства

$$A(x_1) + B(x_1) = PU(x_0)\,P',$$

$$A(x_2) - A(x_0) + B(x_2) - B(x_0) = P\,[U(x_2) - U(x_0)]\,P' - \Omega(x_2). \tag{256}$$

Из этих равенств легко находятся все постоянные $A_{\kappa j}$, $B_{\kappa j}$ ($\kappa = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,l$). Подставляя их в формулу суммарных представлений (255), получаем в явном виде решение конечноразностной задачи для полубесконечного параллелепипеда, соответствующей краевой задаче (245), (245′), (245″), (245‴).

Формула (255) точно так же, как это делалось для эллиптических и параболических уравнений, дает резкое снижение количества линейных алгебраических уравнений, подлежащих численному решению в случае конечноразностных краевых задач, соответствующих краевым задачам для гиперболического уравнения (245) при каких-либо краевых условиях, заданных на цилиндрической или на нецилиндрической поверхности довольно общего вида (последнее соответствует краевым задачам для гиперболических уравнений с подвижными границами).

Укажем, что если вместо матриц T, P, Λ и T', P', Λ' воспользоваться матрицами T_3, P_3, Λ_3, определенными равенствами (110), (111), (110′) и матрицами T_3', P_3', Λ_3' точно такого же вида, но только порядка l (а не n)[1], то в качестве обобщения формулы (255) получается формула суммарных представлений следующего вида:

$$U(x_i) = P_3[A(x_i) + B(x_i) + \Omega(x_i)]P_3'^{*} \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{257}$$

где $A(x_i)$, $B(x_i)$, $\Omega(x_i)$ — то же, что в формуле (255), с тем отличием что в равенствах (254′) вместо P' должно быть $P_3'^{*}$, а l-мерные векторы $\vec{F}_\kappa(x_i)$, $\vec{w}_\kappa(x_i)$, $\vec{g}_\kappa(x_i)$ вместо (64), (64′), (64″), определяются равенствами (223) (224), (225) и, разумеется, в равенствах (252) и в таблице 5 под λ_κ ($\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) и λ_j' ($j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l$) следует понимать элементы матриц Λ_3 и, соответственно, Λ_3'.

Формула (257) дает в явном виде решение конечноразностной задачи, соответствующей краевой задаче для дифференциального уравнения (245) при начальных и краевых условиях

$$v|_{x=x_1} = \beta(y,\ z), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \beta'(y,\ z), \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_n, \quad z_1 \leqslant z \leqslant z_l, \tag{258}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa v\right)_{y=y_1} = \beta_1(x,\ z), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa_1 v\right)_{y=y_n} = \beta_2(x,\ z), \quad x > x_1,$$
$$z_1 \leqslant z \leqslant z_l, \tag{258′}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \tau v\right)_{z=z_1} = \beta_3(x,\ y), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \tau_1 v\right)_{z=z_l} = \beta_4(x,\ y), \quad x > x_1,$$
$$y_1 \leqslant y \leqslant y_n, \tag{258″}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе области, κ, κ_1, τ, τ_1 — неотрицательные постоянные, причем

$$1 - \kappa h_1 = \operatorname{tg}\alpha, \quad 1 - \kappa_1 h_1 = \operatorname{tg}\beta, \quad 1 - \tau h_2 = \operatorname{tg}\alpha', \quad 1 - \tau_1 h_2 = \operatorname{tg}\beta'. \tag{258‴}$$

---

[1] В матрице T_3' вместо $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ для общности следует подставить $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta'$, $[\operatorname{tg}\alpha']$, $[\operatorname{tg}\beta'] \leqslant 1$.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Рассмотрим краевую задачу

$$Lv = \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - 2\lambda v - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, y) \quad (\lambda,\ a = \mathrm{const},\ a \neq 0), \tag{259}$$

$$v|_{x=x_1} = \beta(y), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{=x_1} = \beta'(y) \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_{n+1}, \tag{259'}$$

$$v|_{y=y_0} = \beta_1(x), \quad \left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{y=y_0} = \beta_1'(x), \quad v|_{y=t_{n+1}} = \beta_2(x), \tag{259''}$$

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{y=y_{n+1}} = \beta_2'(x) \quad x > x_1,$$

где $f(x, y)$, $\beta(y)$, $\beta'(y)$, $\beta_1(x)$, $\beta_1'(x)$, $\beta_2(x)$, $\beta_2'(x)$ — заданные функции своих аргументов, v — неизвестная функция в полуполосе $y_0 \leqslant y \leqslant y_{n+1}$, $x > x_1$ (см. рис. 1).

Пусть, как и ранее, h — шаг сетки по x, h_1 — шаг сетки по y, $x_i = x_0 + ih$, $y_\kappa = y_0 - \kappa h_1$, $(i,\ \kappa = 0 \pm 1, \ldots)$.

Замечая, что

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} = \frac{v(x+h, y) - 2v(x, y) + v(x-h, y)}{h^2} + 0(h^2),$$

$$\frac{\partial^4 v(x, y)}{\partial y^4} = \frac{1}{h_1^4}[v(x, y+2h_1) - 4v(x, y+h_1) +$$

$$+ 6v(x, y) - 4v(x, y-h_1) + v(x, y-2h_1) + 0(h_1^2),$$

и вводя обозначение

$$\frac{ah^2}{h_1^4} = r, \tag{260}$$

конечноразностный оператор $L_h u$, соответствующий оператору Lv, представим в виде шаблона

$$L_h u|_{x,y} = \frac{1}{h_1^4} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline & -4 & \\ \hline -\frac{1}{r} & 6 - 2\lambda h_1^4 + \frac{2}{r} & -\frac{1}{r} \\ \hline & -4 & \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \; u(x, y). \tag{261}$$

При этом для всякой функции $v(x, y)$, имеющей непрерывные производные до шестого порядка, ограниченные в полуполосе $y_0 \leq y \leq y_{n+1}$, $x > x_1$, в узлах сетки имеет место равенство

$$L_h v = Lv + 0\left(h_1^2\right). \qquad (262)$$

Рассмотрим конечноразностное уравнение, соответствующее уравнению (259),

$$L_h u = f(x_i, y_\kappa) \quad (i = 1, 2, \ldots; \kappa = 1, 2, \ldots, n). \qquad (263)$$

Вводя оператор

$$Ru_\kappa(x_i) = -u_\kappa(x_i + 2h) + 2(1 + r(3 - \lambda_1 h_1^4))\, u_\kappa(x_i + h) - u_\kappa(x_i), \qquad (264)$$

уравнение (263) можем записать в виде системы уравнений

$$Ru_\kappa(x) - 4r[u_{\kappa-1}(x+h) + u_{\kappa+1}(x+h)] + r[u_{\kappa-2}(x+h) + u_{\kappa+2}(x+h)] = rh_1^4 f_\kappa(x+h) \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, n), \qquad (265)$$

или в развернутой форме

$$\begin{gathered}
Ru_1(x) - 4ru_2(x+h) + r[-u_1(x+h) + u_3(x+h)] = \\
= rh_1^4 f_1(x+h) + 4ru_0(x+h) - r[u_{-1}(x+h) + u_1(x+h)]; \\
Ru_2(x) - 4r[u_1(x+h) + u_3(x+h)] + ru_4(x+h) = \\
= rh_1^4 f_2(x+h) - ru_0(x+h); \\
Ru_3(x) - 4r[u_2(x+h) + u_4(x+h)] + \\
+ r[u_1(x+h) + u_5(x+h)] = rh_1^4 f_3(x+h); \qquad (265') \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Ru_{n-2}(x) - 4r[u_{n-3}(x+h) + u_{n-1}(x+h)] + \\
+ r[u_{n-4}(x+h) + u_n(x+h)] = rh_1^4 f_{n-2}(x+h); \\
Ru_{n-1}(x) - 4r[u_{n-2}(x+h) + u_n(x+h)] + \\
+ r[u_{n-3}(x+h)] = rh_1^4 f_{n-1}(x+h) - ru_{n+1}(x+h); \\
Ru_n(x) - 4ru_{n-1}(x+h) + r[-u_n(x+h) + u_{n-2}(x+h)] = \\
= rh_1^4 f_n(x+h) + 4ru_{n+1}(x+h) - r[u_n(x+h) + u_{n+2}(x+h)].
\end{gathered}$$

Будем пользоваться матрицами T, P и Λ, определенными равенствами (16), (7), (6), (19) и обозначением (20). Введем еще n-мерные векторы

$$\vec{\omega}(x+h) = (-4u_0(x+h),\ u_0(x+h),\ 0, \ldots 0, \ldots u_{n+1}(x+h),\ -4u_{n+1}(x+h)), \qquad (266)$$

$$\vec{w}(x+h) = (u_{-1}(x+h) + u_1(x+h),\ 0, \ldots, 0,\ u_n(x+h) + u_{n+2}(x+h)). \qquad (266')$$

Учитывая тождество (130), запишем систему уравнений (265′) в векторной форме:

$$R\vec{u}(x) - 4rT\vec{u}(x+h) + r(T^2 - 2E)\vec{u}(x+h) =$$
$$= rh_1^4\vec{f}(x+h) - r\vec{\omega}(x+h) - r\vec{w}(x+h). \qquad (267)$$

Отсюда имеем

$$R\vec{\hat{u}}(x) - 4r\Lambda\vec{\hat{u}}(x+h) + r(\Lambda^2 - 2E)\vec{\hat{u}}(x+h) =$$
$$= rh_1^4\vec{\hat{f}}(x+h) - r\vec{\hat{\omega}}(x+h) - r\vec{\hat{w}}(x+h), \qquad (268)$$

или в развернутой форме

$$R\hat{u}_\kappa(x) - 8r\lambda_\kappa\hat{u}_\kappa(x+h) + r(4\lambda_\kappa^2 - 2)\hat{u}_\kappa(x+h) =$$
$$= rh_1^4\hat{f}_\kappa(x+h) - r\hat{\omega}_\kappa(x+h) - r\hat{w}_\kappa(x+h). \qquad (268')$$

Учитывая (264), систему уравнений (268′) можем записать в виде

$$\hat{u}_\kappa(x_i + 2h) - 2[1 + r(2 - \lambda h_1^4 - 4\lambda_\kappa + 2\lambda_\kappa^2)]\hat{u}_\kappa(x_i + h) +$$
$$+ \hat{u}_\kappa(x_i) = -rh_1^4\hat{f}_\kappa(x_i + h) + r\hat{\omega}_\kappa(x_i + h) + r\hat{w}_\kappa(x_i + h) \qquad (268'')$$
$$(\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Полагая

$$\eta_\kappa = 1 + 2r(1 - \lambda_\kappa)^2 - r\lambda h_1^4, \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (269)$$

$$\mu_\kappa = \eta_\kappa + \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1}, \quad \nu_\kappa = \eta_\kappa - \sqrt{\eta_\kappa^2 - 1} \quad (\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (269')$$

получаем общее решение системы уравнений (268″) в виде

$$\hat{u}_\kappa(x_i) = A_\kappa\varphi_\kappa(x_i) + B_\kappa\psi_\kappa(x_i) + \Omega_\kappa(x_i) \qquad (270)$$
$$(i = 0,\ 1,\ \ldots),$$

где A_κ, B_κ — произвольные постоянные

$$\Omega_\kappa(x_i) = \sum_{p=1}^{p=i-1} G_\kappa(i-p)[-rh_1^4\hat{f}_\kappa(x_p) + r\hat{\omega}_\kappa(x_p) + r\hat{w}_\kappa(x_p)], \qquad (270')$$
$$\Omega_\kappa(x_0) = \Omega_\kappa(x_1) = 0,$$

а $\varphi_\kappa(x_i)$, $\psi_\kappa(x_i)$, $G_\kappa(i)$ в зависимости от величин η_κ, заданных равенствами (269), определяются формулами, указанными в таблице 4.

Пользуясь обозначениями (236), (236′), (236″), можем общее решение векторного уравнения (268) записать в виде

$$\vec{\hat{u}}(x_i) = \Phi(x_i)\vec{A} + \Psi(x_i)\vec{B} + \vec{\Omega}(x_i). \qquad (271)$$

Умножая обе части этого равенства на P, получаем формулу суммарных представлений, соответствующую оператору $L_h u$,

$$\vec{u}(x_i) = P\Phi(x_i)\vec{A} + P\Psi(x_i)\vec{B} + P\vec{\Omega}(x_i), \tag{272}$$
$$\Omega(x_0) = \Omega(x_1) = 0 \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Отметим, что если ввести диагональную матрицу n-го порядка

$$G(i) = [G_1(i),\ G_2(i),\ \ldots,\ G_n(i)], \tag{272'}$$

то вектор $\vec{\Omega}(x_i)$ можно представить в виде

$$\vec{\Omega}(x_i) = \sum_{p=1}^{p=i-1} G(i-p)\, P\left[-rh_1^4 \vec{f}(x_p) + r\vec{\omega}(x_p) + r\vec{\omega}(x_p)\right], \tag{272''}$$
$$\Omega(x_0) = \Omega(x_1) = 0.$$

Формула (272) позволяет найти в явном виде решение конечно-разностной задачи, соответствующей краевой задаче (259'), (259'), (259'').

В самом деле, в силу краевых условий (259'') вектор $\vec{\Omega}(x_i)$ будет известен, так как

$$u_0(x_p) = \beta_1(x_p), \quad u_{n+1}(x_p) = \beta_2(x_p),$$
$$u_{-1}(x_p) + u_1(x_p) \approx h_1^2\beta_1'(x_p) + 2\beta_1(x_p),$$
$$u_{n+2}(x_p) + u_n(x_p) \approx h_1^2\beta_2'(x_p) + 2\beta_2(x_p),$$

Из начальных условий (259') следует, что векторы

$$\vec{u}_1(x_1), \quad \vec{u}(x_2) - \vec{u}_0(x_1)$$

будут известными. Учитывая это, для определения $\vec{A}$ и $\vec{B}$ получаем равенства

$$\vec{u}(x_1) = P\Phi(x_i)\vec{A} + P\Psi(x_1)\vec{B},$$
$$P[\Phi(x_2)\vec{A} + \Psi(x_2)\vec{B} + \vec{\Omega}(x_2)] -$$
$$- P[\Phi(x_0)\vec{A} + \Psi(x_0)\vec{B}] = \vec{u}(x_2) - \vec{u}(x_0),$$

или

$$\Phi(x_1)\vec{A} + \Psi(x_1)\vec{B} = \vec{\hat{u}}(x_1),$$

$$(\Phi(x_2) - \Phi(x_0))\vec{A} + (\Psi(x_2) - \Psi(x_0))\vec{B} = \vec{\hat{u}}(x_2) - \vec{\hat{u}}(x_0) - \vec{\Omega}(x_2). \tag{273}$$

Из (273) векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ находятся очень просто. Подставляя эти векторы в формулу (272), получаем в явном виде решение конечно-разностной задачи, соответствующей краевой задаче (259), (259'), (259''), а следовательно, и приближенное решение краевой задачи (259), (259'), (259'').

Формула суммарных представлений (272), по аналогии с предыдущими параграфами, позволяет резко сократить количество линейных алгебраических уравнений, подлежащих численному решению, при нахождении решения конечноразностных задач, соответствующих дифференциальному уравнению (259) при начальных условиях (259′) в самом общем случае, когда краевые условия (259″) заменяются всевозможными другими краевыми условиями которые могут задаваться не только на прямых $y = y_0$, $y = y_n$, но и на кривых довольно общего вида, выходящих из точек (x_1, y_0), (x_1, y_{n+1}).

Рассмотрим для иллюстрации случай, когда краевые условия (259″) заменяются следующими краевыми условиями:

$$v|_{y=y_0} = \beta_1(x), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y_0} = \beta_1'(x),$$
$$v|_{y=y_{n+1}} = \beta_2(x), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y_{n+1}} = \beta_2'(x), \quad x \geqslant x_1. \tag{259‴}$$

В этом случае, полагая

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y_0} \cong \frac{v(x, y_1) - v(x, y_{-1})}{2h_1}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=y_{n+1}} \cong \frac{v(x, y_{n+2}) - v(x, y_n)}{2h_1},$$

можем считать

$$\vec{w}(x_p) = \vec{w}_0(x_p) + \vec{w}^*(x_p), \tag{274}$$

где

$$\vec{w}_0(x_p) = (2u_1(x_p),\ 0, \ldots 0,\ 2u_n(x_p)) \tag{274′}$$

$\vec{v}^*(x_p)$ — известный вектор,

$$\vec{w}^*(x_p) = (2h_1\beta_1'(x_p),\ 0, \ldots,\ 0,\ 2h,\ \beta_2'(x_p)). \tag{274″}$$

Вектор $\vec{\Omega}(x_i)$, входящий в формулу (272) и определенный равенством (272″), будет зависеть от $\vec{w}_0(x_p)$ как от векторного параметра. Однако вектор $\vec{\Omega}(x_i)$ при $x = x_0$ и $x = x_1$ равен нулю, а при $x = x_2$ этот вектор будет известным, так как вектор $\vec{w}_0(x_1)$ известен в силу начальных условий (259′). Таким образом, векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ определяются из системы уравнений (273) и не зависят от $\vec{w}_0(x_1)$ при $p \geqslant 2$, а зависят только от известного вектора $\vec{w}_0(x_1)$. Подставляя найденные значения $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в формулу (272), в явном виде получаем $\vec{u}(x_2)$ и, в частности, $\vec{w}_0(x_2)$. Подставляя $\vec{w}_0(x_2)$ в (272″), получаем $\vec{\Omega}(x_3)$. По известному значению $\vec{\Omega}(x_3)$ из (272) находим $\vec{u}(x_3)$ и, в частности

$\vec{w}_0(x_3)$. Поступая с $\vec{w}_0(x_3)$ так же, как и с $\vec{w}_0(x_1)$, найдем $\vec{u}(x_4)$ и, в частности, $\vec{w}_0(x_4)$ Продолжая этот процесс, можем получить решение конечноразностной задачи, соответствующей краевой задаче (259), (259'), (259''') в любой точке бесконечной полуполосы $y_0 \leq y \leq y_{n+1}$, $x \geq x_1$.

Легко заметить, что полученный здесь результат по решению краевых задач для дифференциального уравнения (259) при помощи нашего метода без особого труда переносится на случай краевых задач для дифференциального уравнения с тремя независимыми переменными

$$Lv = \Delta\Delta v - 2\lambda v - \frac{1}{a}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(x, y, z)\,(\lambda,\ a = \mathrm{const},\ a \neq 0), \qquad (275)$$

где

$$\Delta\Delta v = \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4}, \qquad (275')$$

$f(x, y, z)$ — заданная функция своих аргументов. В частности, это относится к известному дифференциальному уравнению поперечных колебаний упругой пластинки.

§ 6. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Построенный нами в предыдущих параграфах метод суммарных представлений и P-трансформаций численного решения краевых задач для эллиптических, а также гиперболических и параболических дифференциальных уравнений в частных производных с двумя и тремя независимыми переменными[1] применим для численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений указанных типов не только с постоянными, но и с переменными коэффициентами.

Разница при этом будет заключаться только в том, что там, где мы раньше пользовались P-трансформациями, соответствующими матрицам T, T_1, T_2, T_3, и за счет этого обходились только элементарными функциями (тригонометрическими и показательными), теперь, в случае уравнений с переменными коэффициентами, необходимо будет пользоваться более сложными P-трансформациями, соответствующими матрицам типа Π, и специальными функциями дискретного аргумента $P_\lambda(x_\kappa)$ и $T_\lambda(x_\kappa)$, введенными нами в гл. 1, § 4. При этом в силу установленного в гл. 1 основного свойства матриц типа Π (см. теорему 2, гл. 1, § 2, п. 5) формулы суммарных пред

[1] Очевидно, что за счет дополнительных P-трансформаций число независимых переменных в рассматриваемых уравнениях можно увеличить.

ставлений для уравнений с переменными коэффициентами по своей форме должны быть совершенно аналогичными формулам суммарных представлений для уравнений соответствующих типов с постоянными коэффициентами. Участвующие в них специальные функции дискретного аргумента $P_\lambda(x_\kappa)$ и $T_\lambda(x_\kappa)$ хотя и отличны от тригонометрических и показательных функций, к которым все хорошо привыкли, тем не менее замечательное свойство этих функций, установленное в гл. 1, заключающееся в формулах приведения аргумента (140) или (154), позволяет надеяться на то, что вычисления и преобразования, связанные с функциями $P_\lambda(x_\kappa)$, $T_\lambda(x_\kappa)$ при решении многих важных классов краевых задач, могут оказаться достаточно простыми и нетрудоемкими.

В качестве иллюстрации применения нашего метода к всевозможным линейным дифференциальным уравнениям в частных производных с переменными коэффициентами рассмотрим некоторые классы таких уравнений, представляющие также самостоятельный интерес.

Пусть дано уравнение в частных производных

$$Lv = p(y)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(p(y)\frac{\partial v}{\partial y}\right) - q(y)v = p(y)f(x, y), \qquad (276)$$

где $p(y)$, $q(y)$, $f(x,y)$— заданные функции своих аргументов, причем $p(y) > 0$ при всех рассматриваемых значениях y.

Рассмотрим краевые задачи для уравнения (276) для прямоугольника, когда краевые условия на его горизонтальных сторонах (см. рис. 1) для определенности имеют вид

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa v\right)_{y=y_1} = \beta(x), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \kappa_1 v\right)_{y=y_n} = \beta_1(x), \; x_0 \leq x \leq x_{m+1}, \qquad (276')$$

или

$$v|_{y=y_0} = \beta(x), \quad v|_{y=y_{n+1}} = \beta_1(x), \quad x_0 \leq x \leq x_{m+1}, \qquad (276'')$$

где $\beta(x)$ и $\beta_1(x)$ — заданные функции своих аргументов, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе прямоугольника, κ и κ_1 — неотрицательные постоянные.

Вид краевых условий на вертикальных сторонах прямоугольника пока не будет интересовать нас.

Пусть, как и раньше, h — шаг сетки по x, h_1 — шаг сетки по y, $\gamma = \frac{h}{h_1}$, $x_i = x_0 + ih$, $y_\kappa = y_0 + \kappa h$ $(\kappa = 0, \pm 1, \ldots)$. Пользуясь обозначениями (3), можем конечноразностный оператор $L_h u$, соответствующий дифференциальному оператору Lv левой части уравнения (276), взять в виде шаблона (см. гл. 1, § 2, п. 1):

$$
L_h u\Big|_{x_i,\, y_k} = \frac{1}{h_1^2}\left|\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
 & p_{k-1} & \\
\hline
 & -(p_{k-1} + p_k + q_k h_1^2) & \\
\hline
 & p_k & \\
\hline
\end{array}\right| u +
$$

$$
+ \frac{1}{h^2}\left|\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
 & & \\
\hline
p_k & -2p_k & p_k \\
\hline
 & & \\
\hline
\end{array}\right| u. \tag{277}
$$

При этом для всякой функции $v(x, y)$, имеющей непрерывные производные до четвертого порядка, при условии, что коэффициент $p(y)$ дважды непрерывно дифференцируемый, в узлах сетки имеет место равенство

$$
L_h v = Lv + 0(h_1 + h^2). \tag{277'}
$$

Поэтому уравнение (276) в рассматриваемом прямоугольнике приближенно можно заменить уравнением в частных конечных разностях следующего вида:

$$
L_h u = p(y_k) f(x_i, y_k) \; (i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n). \tag{278}
$$

Теперь, чтобы получить формулу суммарных представлений для уравнения (278), как и в случае уравнений, рассмотренных в предыдущих параграфах, согласно нашему методу необходимо к искомой функции $u(x_i, y_k)$ применить подходящую P-трансформацию так, чтобы для компонент P-трансформированного вектора удалось получить явное выражение как функции от вполне определенного числа параметров.

В случае дифференциального уравнения (276) и соответствующего ему конечноразностного уравнения (278) можно поступать двумя различными способами.

1°. Поскольку коэффициенты дифференциального уравнения (276) не зависят от x, а коэффициенты соответствующего ему конечноразностного уравнения (278) не зависят от индекса i, то можно по переменной x воспользоваться любой из P-трансформаций, соответствующей одной из матриц T, T_1, T_2, T_3, введенных в гл. 1, § 3.

Пусть

$$
P_q, \; P_0 = P \quad (q = 0, \; 1, \; 2, \; 3) \tag{279}
$$

фундаментальные матрицы для $T_0 = T$, T_1, T_2 и, соответственно, T_3,

$$
\Lambda_q = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m], \tag{279'}
$$
$$
\Lambda_0 = \Lambda \, (q = 0, \; 1, \; 2, \; 3)
$$

диагональные матрицы собственных чисел, соответственно, матриц T_0, T_1, T_2, T_3[1] (см. гл. 1, § 3). Пользуясь обозначениями

$$u(x_i, y_\kappa) = u_i(y_\kappa) \quad f(x_i, y_\kappa) = f_i(y_\kappa), \tag{280}$$

введем m-мерные векторы

$$\vec{u}(y_\kappa) = (u_1(y_\kappa), u_2(y_\kappa), \ldots, u_m(y_\kappa)), \tag{281}$$
$$\vec{f}(y_\kappa) = (f_1(y_\kappa), f_2(y_\kappa), \ldots, f_m(y_\kappa))$$

и P^*-трансформации этих векторов

$$\vec{\hat{u}}(y_\kappa) = (\hat{u}_1(y_\kappa), \hat{u}_2(y_\kappa), \ldots, \hat{u}_m(y_\kappa)) = P_q^*\vec{u}(y_\kappa), \tag{282}$$
$$\vec{\hat{f}}(y_\kappa) = (\hat{f}_1(y_\kappa), \hat{f}_2(y_\kappa), \ldots, \hat{f}_m(y_\kappa)), = P_q^*\vec{f}(y_\kappa).$$

Вводя конечноразностный оператор

$$Ru_i(y_\kappa) = p_\kappa u_i(y_\kappa + h_1) - (p_{\kappa-1} + p_\kappa + q_\kappa h_1^2 +$$
$$+ 2p_\kappa\gamma^{-2}) u_i(y_\kappa) + p_{\kappa-1}u_i(y_\kappa - h_1), \tag{283}$$

можем конечноразностное уравнение (278) записать в виде системы m уравнений

$$Ru_i(y_\kappa) + p_\kappa\gamma^{-2}[u_{i-1}(y_\kappa) + u_{i+1}(y_\kappa)] = h_1^2 p_\kappa f_i(y_\kappa) \tag{284}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Введем теперь m-мерные векторы

$$\vec{\omega}_q(y_\kappa) \quad (q = 0, 1, 2, 3)$$

при помощи равенств

$$\vec{\omega}_0(y_\kappa) = (u_0(y_\kappa), 0, \ldots, 0, u_{m+1}(y_\kappa)),$$
$$\vec{\omega}_1(y_\kappa) = (u_0(y_\kappa), 0, \ldots, 0, u_{m+1}(y_\kappa) + \operatorname{tg}\beta\, u_m(y_\kappa)), \tag{285}$$
$$\vec{\omega}_2(y_\kappa) = (u_0(y_\kappa) + \operatorname{tg}\alpha\, u_1(y_\kappa), 0, \ldots, 0, u_{m+1}(y_\kappa)),$$
$$\vec{\omega}_3(y_\kappa) = (u_0(y_\kappa) + \operatorname{tg}\alpha\, u_1(y_\kappa), 0, \ldots, 0, u_{m+1}(y_\kappa) + \operatorname{tg}\beta u_m(y_\kappa)),$$

где α и β — заданные числа, такие, что $|\operatorname{tg}\alpha|$, $|\operatorname{tg}\beta| \leqslant 1$.

После этого систему уравнений (284) можем представить в виде одного векторного уравнения

$$R\vec{u}(y_\kappa) + \gamma^{-2}p_\kappa T_q\vec{u}(y_\kappa) = h_1^2 p_\kappa\vec{f}(y_\kappa) - \gamma^2 p_\kappa\vec{\omega}_q(y_\kappa) \tag{286}$$
$$(q = 0, 1, 2, 3).$$

---

[1] Здесь, как и в гл. 1, § 3, собственные числа матриц T_q обозначаем через λ_κ, а не через $2\lambda_\kappa$, как это было в предыдущих параграфах гл. 2.

Для P^*-трансформации вектора $\vec{u}(y_\kappa)$ из (286) получаем уравнение

$$R\hat{\vec{u}}(y_\kappa) + \gamma^{-2} p_\kappa \Lambda_q \hat{\vec{u}}(y_\kappa) = h_1^2 p_\kappa \hat{\vec{f}}(y_\kappa) - \gamma^{-2} p_\kappa \hat{\vec{\omega}}_q(y_\kappa), \tag{287}$$

или в развернутой форме

$$R\hat{u}_i(y_\kappa) + \gamma^{-2} p_\kappa \lambda_i \hat{u}_i(y_\kappa) = h_1^2 p_\kappa \hat{f}_i(y_\kappa) - \gamma^{-2} p_\kappa \hat{\omega}_{q_i}(y_\kappa) \tag{287'}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Учитывая (283), систему уравнений (287') можем записать в виде

$$p_\kappa \hat{u}_i(y_\kappa + h_1) - [p_{\kappa-1} + p_\kappa + q_\kappa h_1^2 + p_\kappa \gamma^{-2}(2 - \lambda_i)] \hat{u}_i(y_\kappa) +$$

$$+ p_{\kappa-1}\hat{u}_i(y_\kappa - h_1) = h_1^2 p_\kappa \hat{f}_i(y_\kappa) - p_\kappa \gamma^{-2} \hat{\omega}_{q_i}(y_\kappa) \tag{288}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

или

$$p_\kappa \hat{u}_i(y_\kappa + h_1) - r_{i\kappa}\hat{u}_i(y_\kappa) + p_{\kappa-1}\hat{u}_i(y_\kappa - h_1) = \hat{F}_i(y_\kappa)\, p_\kappa \tag{288'}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

где

$$r_{i\kappa} = p_{\kappa-1} + p_\kappa + q_\kappa h_1^2 + p_\kappa \gamma^{-2}(2 - \lambda_i), \tag{288''}$$

$$\hat{F}_i(y_\kappa) = h_1^2 \hat{f}_i(y_\kappa) - p_\kappa \gamma^{-2} \hat{\omega}_{q_i}(y_\kappa). \tag{288'''}$$

Чтобы найти общее решение каждого из уравнений (288'), рассмотрим однородное уравнение

$$p_\kappa \hat{u}_i(y_\kappa + h_1) - r_{i\kappa}\hat{u}_i(y_\kappa) + p_{\kappa-1} u_i(y_\kappa - h_1) = 0 \tag{289}$$

$$(\kappa = 1, 2, \ldots).$$

Общее решение уравнения (289) имеет вид

$$\hat{u}_i(y_\kappa) = A_i P_i(y_\kappa) + B_i T_i(y_\kappa) \tag{289'}$$

$$(\kappa = 1, 2, \ldots),$$

где A_i, B_i — произвольные постоянные, а $P_i(y_\kappa)$ и $T_i(y_\kappa)$ — специальные функции дискретного аргумента y_κ, которые были введены нами в гл. 1, § 4:

$$P_i(y_0) = 0, \quad P_i(y_1) = 1, \quad P_1(y_2) = r_{i1} p_1^{-1},$$

$$P_i(y_\kappa) = \begin{vmatrix} r_{i1}p_1^{-1} & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ p_1 p_2^{-1} & r_{i2}p_2^{-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 p_3^{-1} & r_{i3}p_2^{-1} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & p_{\kappa-3}p_{\kappa-2}^{-1} & r_{i\kappa-2}p_{\kappa-2}^{-1} & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & p_{\kappa-2}p_{\kappa-1}^{-1} & r_{i\kappa-2}p_{\kappa-1}^{-1} \end{vmatrix}$$

$$T_i(y_0)=1,\quad T_i(y_1)=0,\quad T_i(y_2)=-p_0p_1^{-1}$$

$$T_i(y_\kappa)=\begin{vmatrix} -p_0p_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_1p_2^{-1} & r_{i2}p_2^{-1} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_2p_3^{-1} & r_{i3}p_3^{-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p_{\kappa-3}p_{\kappa-2}^{-1} & r_{i\kappa-2}p_{\kappa-2}^{-1} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & p_{\kappa-2}p_{\kappa-1}^{-1} & r_{i\kappa-1}p_{\kappa-1}^{-1} \end{vmatrix}$$

$$(\kappa=2,\ 3\ \dots)$$

Частное решение $\hat{u}_i^0(y_\kappa)$ неоднородного уравнения

$$p_\kappa\hat{u}_\kappa(y_\kappa+h_1)-r_{i\kappa}\hat{u}_i(y_\kappa)+p_{\kappa-1}\hat{u}_i(y_\kappa-h_1)=\hat{F}_i(y_\kappa), \tag{288'}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\hat{u}_i^0(y_0)=\hat{u}_i^0(y_1)=0, \tag{289''}$$

в соответствии с гл. 1, § 1 находим в виде

$$\hat{u}_i^0(y_\kappa)=\sum_{i=1}^{i=\kappa-1}\frac{\begin{vmatrix} P_i(y_i) & T_i(y_i) \\ P_i(y_\kappa) & T_i(y_\kappa)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_i(y_i) & T_i(y_i) \\ P_i(y_{i+1}) & T_i(y_{i+1})\end{vmatrix}}\hat{F}_i(y_i). \tag{289'''}$$

Таким образом, общее решение системы уравнений (288'), или, что все равно, (288), записывается в виде

$$\hat{u}_i(y_\kappa)=A_iP_i(y_\kappa)+B_iT_i(y_\kappa)+\sum_{p=1}^{p=i-1}G_i(\kappa,\ p)\left[h_1^2\hat{f}_i(y_p)-\gamma^2\hat{\omega}_{q_i}(x_p)\right] \tag{290}$$

где

$$(i=1,\ 2,\ \dots,\ m),$$

$$G_i(\kappa,\ p)=\begin{vmatrix} P_i(y_p) & T_i(y_p) \\ P_i(y_\kappa) & T_i(y_\kappa)\end{vmatrix}\begin{vmatrix} P_i(y_p) & T_i(y_p) \\ P_i(y_{p+1}) & T_i(y_{p+1})\end{vmatrix}^{-1} \tag{290'}$$

Решение векторного уравнения (287) в силу (290) будет иметь вид

$$\vec{\hat{u}}(y_\kappa)=\Phi(y_\kappa)\vec{A}+\Psi(y_\kappa)\vec{B}+\sum_{p=1}^{p=\kappa-1}G(\kappa,\ p)\left[h_1^2\vec{\hat{f}}(y_p)-\gamma^2\vec{\hat{\omega}}_q(y_p)\right], \tag{291}$$

где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ — m-мерные векторы произвольных постоянных

$$\vec{A}=(A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_m),\quad \vec{B}=(B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_m), \tag{291'}$$

$\Phi(y_\kappa)$, $\Psi(x_y)$, $G_{(\kappa,\,p)}$ — диагональные матрицы порядка m, причем

$$\Phi(y_\kappa)=[P_1(y_\kappa),\ P_2(y_\kappa),\ \dots,\ P_m(y_\kappa)],$$
$$\Psi(y_\kappa)=[T_1(y_\kappa),\ T_2(y_\kappa),\ \dots,\ T_m(y_\kappa)], \qquad (291'')$$
$$G(\kappa,\ p)=[G_1(\kappa,\ p),\ G_2(\kappa,\ p),\ \dots,\ G_m(\kappa,\ p)].$$

Взяв от обеих частей равенства (291) P-трансформацию, получаем искомую формулу суммарных представлений для уравнения (278) или (276) в следующем виде:

$$\vec{u}(y_\kappa)=P_q\Phi(y_\kappa)\vec{A}+P_q\Psi(y_\kappa)\vec{B}+\sum_{p=1}^{p=\kappa-1}P_qG(\kappa,\ p)P_q^*[h_1^2\vec{f}(y_p)+\vec{\omega}_q(y_t)] \qquad (292)$$

$$(\kappa=0,\quad 1,\dots,\ m+1),$$

где последняя сумма правой части равенства считается равной нулю при $\kappa=0;\ 1$.

В том случае, когда в силу краевых условий краевой задачи для дифференциального уравнения (276) один из векторов $\vec{\omega}_q(y_\kappa)$ ($q=0,\ 1,\ 2,\ 3$) на вертикальных сторонах прямоугольника (см. рис. 1) оказывается известным, формула (292) дает явное выражение для решения соответствующей конечноразностной задачи через $2m$ постоянных $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Эти постоянные должны определяться за счет краевых условий на горизонтальных сторонах прямоугольника. После этого решение конечноразностной задачи, а следовательно, и приближенное решение краевой задачи для дифференциального уравнения (276) для данного прямоугольника находится в явном виде.

Изложенный способ получения формул суммарных представлений для уравнения (276) существенно связан с тем, что коэффициенты этого уравнения зависят только от одной переменной, не зависят от той переменной, по которой мы строим соответствующие P-трансформации. Этот способ может привести к желаемому результату только в том случае, когда коэффициенты уравнения зависят не больше чем от одной независимой переменной.

2°. Дадим теперь второй способ построения формул суммарных представлений для уравнения (276), или, что все равно, для соответствующего ему конечноразностного уравнения (278). Этот способ будет характерен тем, что здесь P-трансформации могут строиться по тем переменным, от которых зависят коэффициенты уравнения. В отличие от первого способа этот способ позволяет получать формулы суммарных представлений также в тех случаях, когда коэффициенты дифференциального уравнения, а следовательно, и соответствующего ему конечноразностного уравнения, зависят от нескольких переменных.

Чтобы получить интересующую нас формулу суммарных представлений для уравнений (278) при помощи P-трансформации ной y, введем обозначения

$$u(x_i,\ y_k) = u_k(x_i),\quad f(x_i,\ y_k) = f_k(i) \tag{293}$$

векторы

$$\vec{u}(x_i) = (u_1(x_i),\ u_2(x_i),\ \ldots,\ u_n(x_i)),$$

$$\vec{f}(x_i) = (f_1(x_i),\ f_2(x_i),\ \ldots,\ f_n(x_i)). \tag{293'}$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Вводя конечноразностный оператор

$$Ru_k(x_i) = u_k(x_i + h) - 2u_k(x_i) + u_k(x_i - h), \tag{294}$$

можем уравнение (278) записать в виде системы n уравнений

$$p_k Ru_k(x_i) + \gamma^2 [p_{k-1} u_{k-1}(x_i) - (p_{k-1} + p_k + q_k h_1^2) u_k(x_i) + p_k u_{k+1}(x_i)] = h^2 p_k f_k(x_i) \tag{295}$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Рассмотрим теперь краевую задачу (см. гл. 1, § 4)

$$L_1 u_k - \lambda \varrho_k u_k = 0 \tag{296}$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

$$u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0,\quad u_{n+1}\cos\beta + u_n \sin\beta = 0, \tag{296'}$$

$$\cos\alpha,\ \cos\beta \neq 0,$$

где λ — числовой параметр,

$$L_1 u_k = p_k u_{k+1} - (p_{k-1} + p_k + q_k h_1^2) u_k + p_{k-1} u_{k-1}, \tag{296''}$$

$$\varrho_k = p_k \gamma^{-2}. \tag{296'''}$$

Пусть матрица типа П

$$\tilde{T} = \varrho^{-1} П, \tag{297}$$

где ϱ — диагональная матрица

$$\varrho = [\varrho_1,\ \varrho_2,\ \ldots,\ \varrho_n], \tag{297'}$$

есть матрица краевой задачи для уравнения

$$\varrho_k^{-1} L_1 u_k = f_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{298}$$

при краевых условиях (296').

Матрица $\tilde{T}$ имеет вид

$$\tilde{T} = \varrho^{-1} \left|\begin{array}{cccccccc}
E_0 - p_0 \operatorname{tg}\alpha & p_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
p_1 & E_1 & p_2 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & p_2 & E_2 & p_3 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & p_{n-2} & E_{n-2} & & p_{n-1} \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & p_{n-1} & & E_{n-1} p_n - \operatorname{tg}\beta
\end{array}\right| \tag{299}$$

$$(E_i = -(p_i + p_{i+1} + q_{i+1} h_{i+1}^2),\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

Теперь воспользуемся результатами, установленными в гл. 1, § 4. Матрица собственных чисел матрицы $\tilde{T}$

$$\tilde{\Lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \tag{300}$$

определяется тем, что ее элементы совпадают с собственными числами краевой задачи (296), (296'). Но общее решение уравнения (296) записывается в виде

$$u_\kappa = u(y_\kappa) = AP_\lambda(y_\kappa) + BT_\lambda(y_\kappa) \tag{301}$$
$$(\kappa = 0, 1, \ldots),$$

где A и B — произвольные постоянные, $P_\lambda(y_\kappa)$ и $T_\lambda(y_\kappa)$ — специальные функции дискретного аргумента, определенные в главе 1, § 4 равенствами (129), (130), при условии, что в этих равенствах q_κ заменено на $q_\kappa h_1^2$. Поэтому, в соответствии с гл. 1, § 4, заключаем, что собственные числа матрицы $\tilde{T}$, или, что все равно, элементы диагональной матрицы $\tilde{\Lambda}$, определяются как n различных вещественных корней уравнения n-ой степени, имеющего вид

$$P_\lambda(y_{n+1}) - \operatorname{tg}\alpha\, T_\lambda(y_{n+1}) + \operatorname{tg}\beta\,[P_\lambda(y_n) - \operatorname{tg}\alpha T_\lambda(y_n)] = 0. \tag{302}$$

Фундаментальную матрицу $\tilde{P}$, соответствующую матрице $\tilde{T}$, находим в виде

$$\tilde{P} = [\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n], \tag{303}$$

где

$$\vec{p}_j = C_j(P_{\lambda_j}(y_1) - \operatorname{tg}\alpha T_{\lambda_j}(y_1),\ P_{\lambda_j}(y_2) - \operatorname{tg}\alpha T_{\lambda_j}(y_2), \ldots \tag{303'}$$
$$\ldots, P_{\lambda_j}(y_n) - \operatorname{tg}\alpha T_{\lambda_j}(y_n)) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

G_j — постоянные,

$$C_j = \left[\sum_{\kappa=1}^{n} \varrho_\kappa (P_{\lambda_j}(y_\kappa) - \operatorname{tg}\alpha T_{\lambda_j}(y_\kappa))^2\right]^{-\frac{1}{2}} (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{303''}$$

При этом, в силу основной теоремы, установленной в гл. 1, § 2, п. 5, будут иметь место равенства

$$\tilde{P}^*_\varrho \tilde{P} = E, \quad \tilde{P}^{-1} = \tilde{P}^*_\varrho, \quad \varrho^{-1}\Pi = \tilde{P}\tilde{\Lambda}\tilde{P}^*_\varrho. \tag{304}$$

Введем теперь n-мерный вектор краевых условий

$$\vec{\omega}(x_i) = \left(\frac{p_0}{p_1}(u_0(x_i) + \operatorname{tg}\alpha u_1(x_i)), 0, \ldots, 0, u_{n+1}(x_i) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{tg}\beta u_n(x_i)\right). \tag{305}$$

Тогда систему уравнений (295) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$R\vec{u}(x_i) + \tilde{T}\vec{u}(x_i) = h^2\vec{f}(x_i) - \gamma^2\vec{\omega}(x_i). \tag{306}$$

Обозначая через $\vec{\hat{u}}(x_i)$ P-трансформацию вектора $\vec{u}(x_i)$, определенную равенством

$$\vec{\hat{u}}(x_i) = \tilde{P}^{-1}\vec{u}(x_i) = P_0^*\vec{u}(x_i), \tag{307}$$

и учитывая (304), векторное уравнение (306) после умножения на $\tilde{P}^{-1}$ можем записать в виде

$$R\vec{\hat{u}}(x_i) + \tilde{\Lambda}\vec{\hat{u}}(x_i) = h^2\vec{\hat{f}}(x_i) - \gamma^2\vec{\hat{\omega}}(x_i), \tag{308}$$

или в развернутой форме

$$R\hat{u}_k(x_i) + \lambda_k\hat{u}_k(x_i) = h^2\hat{f}_k(x_i) - \gamma^2\hat{\omega}_k(x_i) \tag{308'}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Учитывая (294), каждое из уравнений (308') можем записать в виде

$$\hat{u}_k(x_i + h) - 2\left(1 - \frac{\lambda_k}{2}\right)\hat{u}_k(x_i) + \hat{u}_k(x_i - h) = h^2\hat{f}_k(x_i) - \gamma^2\hat{\omega}_k(x_i) \tag{309}$$
$$(i = 1, 2, \ldots).$$

Уравнение (309) представляет собой уравнение с постоянными коэффициентами и поэтому, полагая

$$\eta_k = 1 - \frac{\lambda_k}{2}, \tag{310}$$

по аналогии со случаем уравнения (21), можем записать общее решение уравнения (309) в виде

$$\hat{u}_k(x_i) = A_k\varphi_k(x_i) + B_k\psi_k(x_i) + \sum_{p=1}^{p=i-1} G(i-p)\left[h^2\hat{f}_k(x_p) - \gamma^2\hat{\omega}_k(x_p)\right] \tag{311}$$
$$(i = 0, 1, \ldots),$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные, а функции $\varphi_k(x_i)$, $\psi_k(x_i)$, $G_k(i)$ в зависимости от (310) определяются формулами, указанными в таблице 1 (см. § 1). Причем последняя сумма правой части равенства (311) считается равной нулю при $i = 0;\ 1$.

Пользуясь векторами произвольных постоянных $\vec{A}$ и $\vec{B}$, определенными равенствами (10''), диагональными матрицами $\Phi(i)$, $\Psi(i)$ и $G(i)$, определенными равенствами (10''') и (12), получаем общее решение векторного уравнения (308) в следующем виде:

$$\vec{\hat{u}}(x_i) = \Phi(i)\vec{A} + \Psi(i)\vec{B} + \sum_{p=1}^{p=i-1} G(i-p)\left[h^2\vec{\hat{f}}(x_p) - \gamma^2\vec{\hat{\omega}}(x_p)\right] \tag{311'}$$
$$(i = 0, 1, \ldots).$$

Взяв от обеих частей этого равенства $\tilde{P}$-трансформацию, т. е. умножая это равенство на $\tilde{P}$, получаем искомую формулу суммарных представлений для уравнения (276) или (278) в следующем виде:

$$\vec{u}(x_i) = \tilde{P}\Phi(i)\vec{A} + \tilde{P}\Psi(i)\vec{B} + \\ + \sum_{p=1}^{p=i-1} \tilde{P}G(i-p)\tilde{P}^{*}_{\varrho}[h^2\vec{f}(x_p) - \gamma^2\vec{\omega}(x_p)] \tag{312}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, m+1),$$

где последняя сумма правой части равенства считается равной нулю при $i = 0, \pm 1$.

Если в равенстве (305), определяющем вектор краевых условий $\vec{\omega}(x_i)$, положить $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 0$, то при этом формула суммарных представлений (312) будет давать в явном виде решение конечноразностной задачи, соответствующей уравнению (276) для случая, когда на горизонтальных сторонах прямоугольника $y = y_0$ и $y = y_{n+1}$ заданы значения функции (276″) Входящие в формулы векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ должны определяться из краевых условий задачи на вертикальных сторонах прямоугольника. В том случае, когда краевые условия задачи имеют вид (276′), в равенстве (305) следует положить $\operatorname{tg}\alpha = -1 - \kappa h_1$, $\operatorname{tg}\beta = 1 - \kappa_1 h_1$ После этого формула (312) будет давать решение соответствующей конечноразностной задачи в рассматриваемом прямоугольнике, выраженное через $\vec{A}$ и $\vec{B}$, которые определяются из краевых условий на вертикальных сторонах прямоугольника.

В том случае, когда краевая задача для уравнения (276) ставится для какой-либо области, отличной от прямоугольника, формулы суммарных представлений (312) и (292) приводят к резкому снижению количества линейных алгебраических уравнений, подлежащих непосредственно численному решению, точно так же, как это делалось нами в применении к краевым задачам для уравнений Лапласа, Пуассона и других уравнений в предыдущих параграфах.

Допустим теперь, что вместо дифференциального уравнения (276) нам дано уравнение следующего вида:

$$Lv = p(y)Mv + \frac{\partial}{\partial y}\left[p(y)\frac{\partial v}{\partial y}\right] - q(y)v = p(y)f(x, y), \tag{313}$$

где $p(y)$, $q(y)$, $f(x, y)$ — то же, что и в (276), а Mv — дифференциальный оператор по переменной x с коэффициентами, зависящими только от x.

Поступая точно так же, как мы делали при выводе формулы суммарных представлений (312), мы получили бы без каких-либо изменений векторное уравнение

$$\hat{R}\vec{u}(x_i) + \hat{\Lambda}\vec{u}(x_i) = h^2\hat{\vec{f}}(x_i) - \gamma^2\hat{\vec{\omega}}(x_i), \tag{314}$$

в котором оператор $Ru_к(x_i)$, в отличие от (308), не определяется равенством (294), а представляет собой конечноразностную аппроксимацию оператора Mu, умноженную на h^2. Но уравнение (314) эквивалентно системе n обыкновенных разностных уравнений по переменной x. Общее решение этой системы уравнений с разделенными функциями, если для определенности считать, что порядок оператора Mu равен двум, можно получить в явном виде точно так же, как это мы делали при рассмотрении системы уравнений (288), когда выводили формулу суммарных представлений (292). После этого, чтобы получить формулу суммарных представлений, соответствующую уравнению (313), достаточно только произвести $\overleftarrow{P}$-трансформацию найденного вектора $\hat{u}(x_i)$.

Таким образом, указанный здесь метод P-трансформаций, соответствующих различным матрицам типа П и специальным функциям дискретного аргумента, введенным в гл. 1, позволяет получать формулы суммарных представлений для линейных дифференциальных уравнений в частных производных математической физики с двумя и тремя независимыми переменными (а также и с большим числом независимых переменных) не только в случае постоянных, но и в случае переменных коэффициентов данных уравнений. Причем это относится в одинаковой степени как к эллиптическим, так и к гиперболическим и параболическим дифференциальным уравнениям второго и четвертого (а также и высших) порядков.

Формулы суммарных представлений в случае краевых задач для прямоугольной области дают решение соответствующих конечноразностных задач в явном виде, если порядок уравнения равен двум, и в виде выражения, могущего содержать небольшое количество параметров, в случае уравнений четвертого порядка.

Если область, для которой ставится краевая задача, отлична от прямоугольника, то формулы суммарных представлений во всех случаях позволяют резко сократить количество линейных алгебраических уравнений, подлежащих непосредственно численному решению, точно так же, как это, в соответствии с общей идеей нашего метода, было сделано в предыдущих параграфах при рассмотрении двумерных и трехмерных краевых задач для основных уравнений математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства, 15—20 октября 1956 года, Пленарные заседания, Выступление А. А. Дородницына, Изд. АН СССР, М., 1957.

2. Ю. В. Воробьев, Метод моментов в прикладной математике, ГИФМЛ, М., 1958.

3. C. Runge, Über eine Methode die partielle Differentialgleichung $\Delta u =$ constans numerisch zu integrieren, Z. Math. Phys., 56, 1908, 225—232.

4. L. F. Richardson, The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems in volving Differential Equations with an Application to the Stresses in a Masoury Dam., Philos. Frans. Roy. Soc. (London) A. 210, 1911, 308—357.

5. H. Liebman, Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und Konformer Abbildung, Sitzgsber. bauer Akad. wiss. Math. phys. k 1, 1918, 385—416.

6. H. Hensky, Die Numerische Bearbeitung von partiellen Differentialgleichungen in der Technik, Z. angew. Math. Mech., № 2, 1922, 58—66.

7. Л. А. Люстерник, Проблема Дирихле, Матем. сборник, 32, вып. 2, 1926.

8. Р. Курант, К. Фридрихс, Г. Леви, О разностных уравнениях математической физики, Успехи матем. наук, вып. 8, 1940.

9. H. Marcus, Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsammer Platten, 2. Aufl., Berlin, 1932.

10. F. Wolf, Über die angenäherte numerische Berechnung harmonischer und biharmonischer Funktionen, Z. angew. Math. Mech., 6, 1926, 118—150.

11. S. Gerschgorin, Fehlerabschä tzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partiellen Differentialgleichungen, Z. angew. Math. Mech., 10, 1930, 373—383.

12. L. Fox, Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations Proc. Roy., Soc., 190, (London), 1947, 31—59.

13. М. К. Гавурин, Л. В. Канторович, Приближенные и численные методы, Математика в СССР за сорок лет, т. 1, 2, ГИФМЛ, М., 1959, 809—857.

14. О. А. Ладыженская, Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными, Успехи матем. наук, т. 12, в. 5, 1957.

15. А. Вебстер, Г. Сеге, Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 1, ГТТИ, 1933.

16. А. Вебстер, Г. Сеге, Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 2, ГТТИ, 1934.

17. Г. М. Положій, Рівняння математичної фізики, вид-во «Радянська школа», Київ, 1959.

18. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, ГИТТЛ, М., 1953.

19. С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, ГИТТЛ, М.—Л. 1950.

20. А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, М., 1950.

21. Ф. Трикоми, Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957.

22 И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

23. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, ГИТТЛ, М.-Л., 1951.

24. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 2., ГИТТЛ, т. 2, 1951.

25. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, т. 1, 1958.

26. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 1, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

27. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 2, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

28. П. Я. Полубаринова-Кочина, Теория движения грунтовых вод, ГИТТЛ, М., 1952.

29. Д. Ю. Панов, Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных, ГИТТЛ, М., 1957.

30. А. А. Дородницын, Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики, Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 2, М., 1956.

31. J. Crank., P. Nicolson, A Practical method for numerical evolution of solutions of partial diff. equations of the heat — conduction type., Proc. Com. Philos, Soc., 43, 1947, 50—67.

32. G. Blanch, On the numerical Solution of parabolic partial differential equations, Nat., Bur. Stand. at Los Angeles, Prepublication Copy., 1951.

33. В. З. Власов, Общая теория оболочек и ее приложения в технике, ГИТТЛ, М.-Л., 1949.

34. В. Э. Милн, Численный анализ, ИЛ. М., 1951.

35. В. Э. Милн, Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1955.

36. В. Н. Фадеева, Вычислительные методы линейной алгебры, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

37. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1953.

38. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.

39. Э. Д. Бут, Численные методы, ГИФМЛ, М., 1959.

40. М. Дж. Сальводори, Численные методы в технике, ИЛ, М., 1955.

41. Современная математика для инженеров, под редакцией Э. Ф. Беккенбаха, ИЛ, М., 1958.

42. А. Ф. Хаусходдер, Основы численного анализа, ИЛ, М., 1956.

43. Р. Д. Рихтмайер, Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, М., 1960.

44. Д. Ю. Панов, Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, ГИТТЛ, М.-Л., 1949.

45. П. М. Варвак, Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. 1, Изд-во АН УССР, К., 1949.

46. П. М. Варвак, Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч. 2, Изд-во АН УССР, К., 1952.

47. Max M. Frocht, Numerical Solution of Laplace's Equations in Composite Rectagular Areas, Journal of Applied Physies, vol. 7., № 9, 1946.

48. M A. Hyman, On the Non-Jterateve Numerical Solution of Boundary volue Problems. Appl. Sc. Research. B. 2, 1952, ?25—351.

49. Н. С. Бахвалов, О составлении уравнений в конечных разностях

при приближенном решении уравнения Лапласа, Успехи матем. наук, т. 12, вып. 5. 1957, 259—260.

50. J. Douglus. H. H. Rachford, Trans. Amer. Soc. 82, № 2, 1956.

51. В. В Русанов, О решении систем разностных уравнений, ДАН СССР, т. 136, № 1, 1961.

52. Г. И. Марчук, Численные методы расчета ядерных реакторов, Атомиздат, М., 1958.

53. И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. 1, т. 2, ГИФМЛ, М., 1959.

54. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, К. Е. Чернин, Таблицы для решения граничных задач теории гармонических функций, ГИТТЛ, М., 1956.

55. Л. И. Гутенмахер, Электрические модели, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949.

56. Г. Н. Положий, Об одном новом методе численного решения краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений, Украинский матем. журнал, т. 12, № 3, 1960.

57. Г. Н. Положий, Об одном численном методе решения краевых задач для уравнений в частных производных, ДАН СССР, т. 134, № 1, 1960.

58. Г. М. Положій, Про скінченні співвідношення для рівнянь в частинних скінченних різницях, ч. 1, 2, Вісник Київського Університету, № 3, серія математики та механіки, вип. 1, вип. 2, 196[illegible] р.

59. N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzen rechnung, Berlin, Verlag von I. Springer, 1924.

60. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, ГИТТЛ, М.—Л., 1952.

61. Milne-Thomson L. M., The calculus of Finite Differences, Macmillan, London, 1951.

62 Ф Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

63. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, 1953.

64. Р. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар, Теория матриц и ее приложения, ИЛ, М., 1950.

65. В. Н. Фадеева, Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 28, 1949.

66 С. Г. Михлин, Вариационные методы математической физики, ГИТТЛ, М., 1957

67 В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, ГИТТЛ, М., 1954.

68. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Гостехиздат, М., 1956.

69. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

70. Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа. т. 1, ГТТИ, Л.—М., 1933.

71. Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. 2, ГТТИ, Л.—М., 1934.

72. Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

73 Г. Н. Положий, Н. А. Пахарева, И. З. Степаненко, П. С. Бондаренко, И. М. Великоиваненко, Математический практикум, Физматгиз, М., 1960.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Г. Н. Положий

Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач.

Редактор *Рижко В. П.*
Техредактор *Загнитко М. М.*
Корректор *Каракоз С. И.*

БФ 16056. Зак. 533. Тираж 4500. Формат бумаги 60×92 1/16. Печат. листов 10,25. Условно-печ. листов 10,25. Учетно-изд. листов 11,43. Бум. листов 5,125. Подписано к печати 25/XII 1961 г. Цена 55 коп.

Издательство КГУ. Киев, Б. Шевченко, 14.

Книжно-журнальная фабрика Главполиграфиздата Министерства культуры УССР
Киев, ул. Воровского, 24.